ARCHIMÈDE

ŒUVRES

DES CORPS FLOTTANTS
STOMACHION
LA MÉTHODE
LE LIVRE DES LEMMES
LE PROBLÈME DES BŒUFS



LES BELLES LETTRES
PARIS

COLLECTION DES UNIVERSITÉS DE FRANCE
Publiée sous le patronage de l'ASSOCIATION GUILLAUME BUDÉ

ARCHIMÈDE

TOME III

DES CORPS FLOTTANTS
STOMACHION
LA MÉTHODE
LE LIVRE DES LEMMES
LE PROBLÈME DES BŒUFS

TEXTE ÉTABLI ET TRADUIT
PAR
CHARLES MUGLER
Professeur honoraire à l'Université de Nice



PARIS
SOCIÉTÉ D'ÉDITION « *LES BELLES LETTRES* »
95, BOULEVARD RASPAIL

1971

Conformément aux statuts de l'Association Guillaume Budé, ce volume a été soumis à l'approbation de la commission technique, qui a chargé M. Ed. Delebecque d'en faire la révision et d'en surveiller la correction en collaboration avec M. Ch. Mugler.

AVANT-PROPOS

Au moment de terminer ce tome III des œuvres conservées d'Archimède, il me tient à cœur d'exprimer à mes collègues E. Delebecque et J. Irigoin ma profonde reconnaissance de l'infatigable sollicitude qu'ils ont continué à témoigner à mon travail.

Ch. MUGLER.

SIGLA

A	codex Vallae deperditus a quo fluxerunt DEGH.
B	Ottobonianus lat. 1850, autographus G. de Moerbeke, a. 1269.
C	Codex rescriptus Metochii Constantinopolitani S. Sepulchri monasterii Hierosolymitani 355, saec. X.
D	Laurentianus XXVIII 4, saec. XV.
E	Marcianus gr. 305, saec. XV.
G	Parisinus gr. 2360, saec. XVI.
H	Parisinus gr. 2361, a. 1544.
P	Parisinus gr. 2448, saec. XIV.
G	Guelferbytanus Gudianus gr. 77.

Basil.	Editio princeps, Basileae, 1544.
Riualtus	Archimedis opera, Parisiis, 1615.
Barrowius	Opera Archimedis, Londini, 1675.
Wallis	Archimedis arenarius et dimensio circuli, Oxonii, 1678.
Torellius	Archimedis opera, Oxonii, 1792.
Nizzius	Nizze, Archimedes' vorhandene Werke, übersetzt und erklärt, Stralsund, 1824.
Heiberg	Archimedis opera omnia, editio altera, Lipsiae, 1910-1915.

DES CORPS FLOTTANTS

NOTICE

Ce traité a pour objet l'étude des lois de la statique des fluides et des conditions d'équilibre des corps solides immergés dans un fluide ou flottant sur lui. De tous les travaux d'Archimède il est celui qui se rapporte le plus à la discipline appelée aujourd'hui physique théorique. Comme dans ses recherches sur l'équilibre des corps solides et dans ses évaluations d'aires et de volumes, les principes et les propositions qu'il démontre théoriquement dans ce traité ont été vérifiés par lui expérimentalement. D'après une légende rapportée par Vitruve (*De l'architecture* IX, 3) Archimède aurait même eu l'intuition du principe fondamental de l'hydrostatique, qu'il analyse dans ce traité, à l'occasion d'un bain. Ce principe fait l'objet des propositions 3-7 du premier livre. Les propositions 8 et 9 du premier livre étudient la position d'équilibre d'un corps flottant ayant la forme d'un segment sphérique. Dans les dix propositions du livre II du traité *Des corps flottants* Archimède étudie les conditions d'équilibre d'un solide flottant affectant la forme d'un segment de paraboloïde de révolution.

Dans le livre I, Archimède suppose que les lignes droites, suivant lesquelles les corps pesants, et les portions de liquide en particulier, exercent leur pression, convergent au centre de la terre, alors qu'au livre II il suppose ces lignes parallèles. Les propositions du deuxième livre ne sont donc valables que pour des corps de dimensions restreintes, à l'échelle humaine, pour lesquelles les verticales peuvent être considérées

comme parallèles, alors que les conclusions du livre I s'appliqueraient aussi à des corps ayant des dimensions de l'ordre de la terre.

La proposition 2 du premier livre, où Archimède déduit de l'hypothèse de la convergence des verticales la forme sphérique de la surface d'un liquide en état d'équilibre, est la première, et pendant des siècles la seule, tentative de rendre compte par le raisonnement mathématique du fait d'observation, familier aux riverains de la Méditerranée, de la courbure de la mer. L'explication du phénomène proposée un siècle avant celle d'Archimède par Aristote, dans son traité *Du ciel*, 287 b 4-14, manque de rigueur mathématique. Aujourd'hui, cette proposition est considérée comme une des bases de la physique et des sciences de la nature. Ch. Lyell, le fondateur de la géologie moderne, l'applique à l'explication de la forme des couches sédimentaires. Mais au moment de sa publication elle se heurta à certaines critiques, entre autres de la part d'Ératosthène, d'après un passage de la *Géographie* de Strabon[1].

Le texte grec est établi d'après le palimpseste de Jérusalem, C, seul manuscrit grec contenant le traité *Des corps flottants*. Les lacunes du ms. C ont été comblées par le texte de la version latine de Guillaume de Moerbeke, ms. $\mathcal{L}$, qui a été notre unique témoignage avant la découverte de C (cf. l'*Introduction*).

1. Cf. *Géogr.* I, 3, 11 ; c. 54.

DES CORPS FLOTTANTS I

Nous admettons comme principe que le liquide a une nature telle que, ses parties étant disposées d'une manière égale et contiguës, celle qui est moins comprimée est poussée de sa place par celle qui est comprimée davantage, et que chacune de ses parties est comprimée par le liquide placé verticalement au-dessus d'elle, à moins que le liquide ne soit enfermé dans quelque (sc. récipient) et comprimé par quelque chose d'autre.

1.

Si une surface est coupée par un plan passant toujours par le même point et que l'intersection est une circonférence de cercle ayant pour centre le point par lequel passe le plan sécant, la surface sera celle d'une sphère.

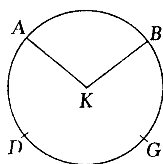


Fig. 85

Soit en effet une surface coupée par un plan passant par le point K, de manière que son intersection (sc. avec la surface) soit toujours une circonférence de

ΟΧΟΥΜΕΝΩΝ Α'

Ἀρχιμήδους Ὀχουμένων α'

Ὑποκείσθω τὸ ὑγρὸν φύσιν ἔχον τοιαύταν, ὥστε τῶν μερέων αὐτοῦ τῶν ἐξ ἴσου κειμένων καὶ συνεχέων ἐόντων ἐξωθεῖσθαι τὸ ἧσσον θλιβόμενον ὑπὸ τοῦ μᾶλλον θλιβομένου, καὶ ἕκαστον δὲ τῶν μερέων αὐτοῦ θλίβεσθαι τῷ ὑπεράνω αὐτοῦ ὑγρῷ κατὰ κάθετον ἐόντι, εἴ κα μὴ τὸ ὑγρὸν ᾖ καθειργμένον ἔν τινι καὶ ὑπ' ἄλλου τινὸς θλιβόμενον.

α'.

Εἴ κα ᾖ ἐπιφάνειά τις ἐπιπέδῳ τεμνομένα διά τινος ἀεὶ τοῦ σαμείου τὰν τομὰν ποιέοντι
circuli periferiam centrum habentem signum, per quod plano secatur, sperae erit superficies.

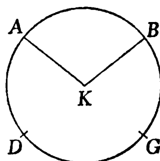


Fig. 85

Sit enim superficies aliqua secta per signum K plano semper sectionem faciente circuli periferiam,

1 Ἀρχ. Ὀχ. α' C : liber Archimedis de insidentibus aque ℒ || 6 ἐόντι ℒ, Arabs : διότι C || μὴ C, Arabs : om. ℒ || 7 καθειργμένον Arabs : καθιέμενον Cℒ || 10 Εἴ κα ᾖ Heiberg : καὶ C si ℒ.

cercle de centre K. Si donc cette surface n'est pas une sphère, les segments de droite reliant le centre à la surface ne seront pas tous égaux. Soit ainsi A, B, G, D des points de la surface ; que les segments AK et KB soient inégaux ; faisons passer par KA et KB un plan qui ait comme intersection avec la surface la ligne DABG ; cette ligne appartient donc à un cercle de centre K, du moment qu'on a fait cette hypothèse sur la surface. KA et KB ne sont donc pas inégaux, par conséquent, la surface est nécessairement celle d'une sphère.

2.

La surface de tout liquide en état de repos aura la forme d'une sphère ayant le même centre que la terre.

Imaginons en effet un liquide en état de repos ; coupons sa surface par un plan passant par le centre de la terre. Soit K le centre de la terre, et ΑΒΓΔ la section de la surface. Je dis que ΑΒΓΔ est une circonférence de cercle de centre K.

En effet, s'il n'en est pas ainsi, les segments de droite menés du point K à la ligne ΑΒΓΔ ne seront pas égaux. Donnons-nous alors un certain segment de droite supérieur à certains des segments menés de K à la ligne ΑΒΓΔ et inférieur à certains autres, et décrivons un cercle autour de K comme centre et avec un rayon égal au segment de droite choisi. La circonférence de ce cercle tombera donc en partie à l'extérieur, en partie à l'intérieur de la ligne ΑΒΓΔ du moment que son rayon est supérieur à certains des segments menés de K à la ligne ΑΒΓΔ et inférieur à certains autres. Soit donc ZBH la circonférence du cercle

centrum autem ipsius K. Si igitur ipsa superficies non est sperae superficies, non erunt omnes quae a centro ad superficiem occurrentes lineae aequales. Sint itaque quae A, B, G, D signa in superficie, et inaequales quae AK, KB, per ipsas autem KA, KB planum educatur et faciat sectionem in superficie lineam DABG ; circuli ergo est ipsa, centrum autem ipsius K, quoniam supponebatur superficies talis. Non sunt ergo inaequales lineae KA, KB ; necessarium igitur est superficiem esse sperae superficiem.

β'.

Omnis humidi consistentis ita, ut maneat inmotum, superficies habebit figuram sperae habentis centrum idem cum terra.

Intelligatur enim humidum consistens ita, ut maneat non motum, et secetur ipsius superficies plano per centrum terrae, sit autem terrae centrum K, superficiei autem sectio linea ABGD. Dico itaque lineam ABGD circuli esse periferiam, centrum autem ipsius K.

Si enim non est, rectae a K ad lineam ABGD occurrentes non erunt aequales. Sumatur itaque aliqua recta, quae est quarundam quidem a K occurrentium ad lineam ABGD maior, quarundam autem minor, et centro quidem K, distantia autem sumptae lineae circulus describatur ; cadet igitur periferia circuli habens hoc quidem extra lineam ABGD, hoc autem intra, quoniam quae ex centro quarundam quidem a K occurrentium ad lineam ABGD est maior, quarundam autem minor, sit igitur descripti circuli periferia quae ZBH, et a B

décrit ; joignons B et K et menons les droites ZK et KEΛ faisant des angles égaux avec BK ; décrivons autour de K comme centre une circonférence XOΠ dans le plan et dans le liquide. Les parties du liquide situées suivant la circonférence XOΠ sont ainsi disposées d'une manière égale et contiguës entre elles ; celles qui sont situées suivant l'arc XO sont comprimées

Fig. 86

par le liquide de la région ZB, et celles qui sont situées suivant l'arc OΠ sont comprimées par le liquide de la région BE ; la compression subie par les parties du liquide situées suivant l'arc XO est donc différente de la compression subie par les parties situées suivant l'arc OΠ[1], de façon que les parties du liquide qui sont moins comprimées sont poussées de leur place par celles qui sont comprimées davantage[2]. Il s'ensuit que le liquide ne restera pas en repos. Mais on l'avait supposé dans un état tel qu'il resterait en repos. Nécessairement donc la ligne[3] ΑΒΓΔ est une circonférence de cercle de centre K. On démontrera de la même façon que, quelle que soit la manière dont la surface du liquide est coupée, par un autre plan passant par le centre de la terre, la section sera une circonférence de cercle, et que son centre est le centre de la terre. Il est donc évident que la surface du liquide, en état de repos, a la forme d'une sphère ayant le même centre

1. OP sur la figure, empruntée au manuscrit latin.
2. Cf. les principes énoncés en tête de la prop. 1.
3. ABGD sur la figure.

ad K recta ducatur, et copulentur quae ZK, KEL aequales facientes angulos, describatur autem et centro K periferia quaedam quae XOP in plano et in humido ; partes itaque humidi quae secundum XOP periferiam ex aequo sunt positae et continuae inuicem. Et premuntur quae quidem secundum XO periferiam humido quod secundum ZB locum ; inaequaliter igitur premuntur partes humidi quae secundum periferiam XO et quae

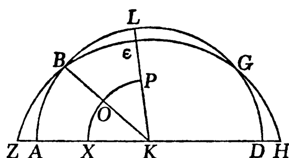


Fig. 86

[ἢ] κατὰ τὰν ΟΠ · ὥστε ἐξωθήσονται τὰ ἧσσον θλιζόμενα ὑπὸ τῶν μᾶλλον θλιζομένων · οὐ μένει ἄρα τὸ ὑγρόν. Ὑπέκειτο δὲ καθεστακὸς εἶμεν ὥστε μένειν ἀκίνητον · ἀναγκαῖον ἄρα τὰν ΑΒΓΔ γραμμὰν κύκλου περιφέρειαν εἶμεν καὶ κέντρον αὐτᾶς τὸ Κ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καί, ὅπως κα ἄλλως ἁ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς, ὅτι ἁ τομὰ ἐσσεῖται κύκλου περιφέρεια, καὶ κέντρον αὐτᾶς ἐσσεῖται ὃ καὶ τᾶς γᾶς ἐστι κέντρον. Δῆλον οὖν ὅτι ἁ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ καθεστακότος ἀκινήτου σφαίρας ἔχει τὸ σχῆμα τὸ αὐτὸ κέντρον ἐχούσας τᾷ γᾷ, ἐπειδὴ τοιαύτα ἐστίν, ὥστε

1 ZK Heiberg : hk^z ms. 𝓛 ‖ 6 et add. Heiberg ‖ 11 οὐ μένει ἄρα C : non ergo constare fecimus aliquod 𝓛 ‖ 12 εἶμεν C : om. 𝓛 ‖ 15 ὅπως κα ἄλλως Heiberg : ὅπως καὶ ἄλλως C quo... (lac.)... modocumque aliter 𝓛 ‖ 18 ὅτι Heiberg : quod 𝓛 om. C ‖ 20 τᾷ γᾷ 𝓛 : τᾶς γᾶς C.

que la terre, puisque cette surface est telle que, coupée par un plan passant par un même point, elle donne lieu à une section affectant la figure d'un cercle ayant pour centre le point par lequel passe le plan sécant[1].

3.

Les grandeurs solides qui (sc. sous un même volume) ont le même poids qu'un liquide s'immergeront, quand elles sont abandonnées dans ce liquide, de manière à ne pas dépasser la surface du liquide et ne descendront pas plus loin vers le fond du liquide[2].

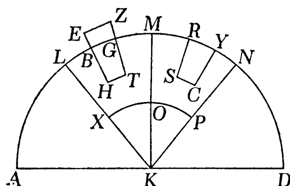


Fig. 87

En effet, qu'une grandeur solide ayant (sc. sous un même volume) le même poids qu'un liquide, soit abandonnée dans ce liquide, et qu'une de ses parties dépasse, si possible, la surface du liquide ; que le liquide reste en état de repos. Imaginons maintenant un plan passant par le centre de la terre et du liquide et par la grandeur solide ; soit l'arc ΑΒΓΔ son intersection avec la surface du liquide, et la figure ΕΖΗΘ son intersection avec la grandeur solide ; soit K le centre de la terre. Soit ΒΓΗΘ la (sc. section de la) partie du solide plongée dans le liquide, ΒΕΖΓ la (sc. section de la) partie qui en émerge. Imaginons une figure

1. Cf. prop. 1.
2. Proposition citée par Héron, *Pneum.* I.

⟨διὰ τοῦ αὐτοῦ σαμείου τμαθεῖσ⟩αν τὰν τομὰν ποιεῖν περιφέρειαν κύκλου κέντρον ἔχοντος τὸ σαμεῖον, δι' οὗ τέμνεται τῷ ἐπιπέδῳ.

γ′.

Τῶν στερεῶν μεγεθέων τὰ ἰσοβαρέοντα τῷ ὑγρῷ ἀφεθέντα εἰς τὸ ὑγρὸν καταβασοῦνται, ὥστε τᾶς ἐπιφανείας τᾶς τοῦ ὑγροῦ μὴ ὑπερέχειν μηδέν, καὶ οὐκέτι οἰσθήσονται ἐπὶ τὸ κάτω.

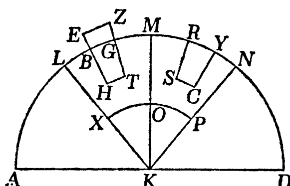


Fig. 87

Ἀφείσθω γάρ τι στερεὸν μέγεθος εἰς τὸ ὑγρὸν τῶν ἰσοβαρέων τῷ ὑγρῷ καί, εἰ δυνατόν, ὑπερεχέτω τι αὐτοῦ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καθεστάτω δὲ τὸ ὑγρόν, ὥστε μένειν ἀκίνητον. Νοείσθω δή τι ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διά τε τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς καὶ τοῦ ὑγροῦ καὶ διὰ τοῦ στερεοῦ μεγέθεος, τομὰ δὲ ἔστω τᾶς μὲν ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἁ ΑΒΓΔ περιφέρεια, τοῦ δὲ στερεοῦ μεγέθεος τὸ ΕΖΗΘ σχῆμα, κέντρον δὲ τᾶς γᾶς τὸ Κ. Ἔστω δὴ τοῦ μὲν στερεοῦ τὸ μὲν ΒΓΗΘ ἐν τῷ ὑγρῷ, τὸ δὲ ΒΕΖΓ ἐκτός.

1 διὰ τοῦ αὐτοῦ σαμείου τμαθεῖσαν Heiberg : secta per idem signum ℒ lac. C ‖ 5 ἰσοβαρέοντα rest. Heiberg : aequalis molis et aequalis ponderis ℒ ‖ 6 καταβασοῦνται Heiberg : καταβαροῦνται C demergentur ℒ ‖ 9 στερεὸν C : om. ℒ ‖ 10 τι αὐτοῦ C : ipsa ℒ ‖ 14 δὲ ℒ : om. C ‖ 15 περιφέρεια C : om. ℒ ‖ 16 σχῆμα Heiberg : σχᾶμα C insidentia ℒ.

solide ayant la forme d'une pyramide ayant pour base un parallélogramme situé dans la surface du liquide et pour sommet le centre de la terre ; que l'intersection entre le plan contenant l'arc ΑΒΓΔ, et les plans de la pyramide soit la droite ΚΛ et la droite ΚΜ. Décrivons autour de Κ comme centre une autre surface sphérique dans le liquide qui s'étend au-dessous du solide ΕΖΗΘ, et qu'elle soit coupée par le plan (sc. de l'arc ΑΒΓΔ). Donnons-nous une autre pyramide, égale et semblable à celle qui contient le solide et contiguë à celle-ci ; soit ΚΜ et ΚΝ les traces de ses plans. Imaginons dans le liquide une certaine grandeur ΡΣΤΥ, découpée dans le liquide, égale et semblable à la partie ΒΗΘΓ du solide qui est plongée dans le liquide. Dès lors, les parties du liquide dans la première pyramide, qui se trouvent sous la surface contenant l'arc ΞΟ, et celles de la seconde pyramide, qui se trouvent sous la surface contenant l'arc ΠΟ, sont disposées d'une manière égale et contiguës les unes aux autres. Mais elles ne sont pas comprimées de la même manière. Le liquide disposé suivant l'arc ΞΟ est en effet comprimé par le solide ΘΗΕΖ et par le liquide situé entre les surfaces suivant les arcs ΞΟ et ΛΜ et les faces de la pyramide, alors que le liquide disposé suivant l'arc ΠΟ est comprimé par le liquide se trouvant entre les surfaces qui contiennent les arcs ΠΟ et ΜΝ et les faces de la pyramide. Mais le poids (sc. la pression) du liquide compris entre les arcs ΜΝ et ΟΠ sera moindre. Le liquide du côté de ΡΣΤΥ est en effet moins lourd que le solide ΕΖΗΘ du moment qu'il est équivalent à la partie du solide ΗΒΓΘ, puisque

Νοείσθω δὴ τὸ στερεὸν σχῆμα περιλαμβανόμενον πυραμοειδεῖ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ ὑγροῦ, κορυφὰν δὲ τὸ κέντρον τᾶς γᾶς, ⟨τομὰ δὲ ἔστω τοῦ τε ἐπιπ⟩έδου, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ ΑΒΓΔ περιφέρεια, καὶ τῶν τᾶς πυραμίδος ἐπιπέδων αἱ ΚΛ, ΚΜ. Γεγράφθω τις ἄλλας σφαίρας ἐπιφάνεια περὶ κέντρον τὸ Κ ἐν τῷ ὑγρῷ τῷ ὑπὸ τοῦ ΕΖΗΘ καὶ τεμνέσθω ἐπιπέδῳ, λελάφθω δέ τις καὶ ἄλλα πυραμὶς ἴσα καὶ ὁμοία τᾷ περιλαμβανούσᾳ τὸ στερεὸν συνεχὴς αὐτᾷ, τομὰ δὲ ἔστω τῶν ἐπιπέδων αὐτᾶς αἱ ΚΜ, ΚΝ, καὶ ἐν τῷ ὑγρῷ νοείσθω τι μέγεθος τοῦ ὑγροῦ ἀπολαμβανόμενον τὸ ΡΣΤΥ ἴσον καὶ ὅμοιον τῷ στερεῷ τῷ κατὰ τὰ Β, Η, Θ, Γ, ὅ ἐστιν αὐτοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ · τὰ δὴ μέρεα τοῦ ὑγροῦ τά τε ἐν τᾷ πρώτᾳ πυραμίδι τὰ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν, ἐν ᾇ ἐστιν ἁ ΞΟ περιφέρεια, καὶ τὰ ἐν τᾷ ἑτέρᾳ, ἐν ᾇ ἐστιν ἁ ΠΟ, ἐξ ἴσου τέ ἐντι κείμενα καὶ συνεχέα. Οὐχ ὁμοίως δὲ θλίβονται · τὸ μὲν γὰρ κατὰ τὰν ΞΟ θλίβεται τῷ στερεῷ τῷ ΘΗΕΖ καὶ τῷ ὑγρῷ τῷ μεταξὺ τᾶν ἐπιφανειᾶν τᾶν κατὰ τὰς ΞΟ, ΛΜ καὶ τῶν τᾶς πυραμίδος ἐπιπέδων, τὸ δὲ κατὰ τὰν ΠΟ τῷ ὑγρῷ τῷ μεταξὺ τᾶν ἐπιφανειᾶν τᾶν κατὰ τὰς ΠΟ, ΜΝ καὶ τῶν τᾶς πυραμίδος ἐπιπέδων. Ἔλασσον δὲ ἐσσεῖται τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ τοῦ κατὰ τὰς ΜΝ, ΟΠ · τὸ μὲν γὰρ κατὰ τὸ ΡΣΤΥ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ΕΖΗΘ στερεοῦ · αὐτῷ γὰρ τῷ κατὰ τὸ ΗΒΓΘ ἴσον ἐστὶν διὰ τὸ τῷ μεγέθει

1 δὴ C : et 𝒢 || 1-2 πυραμοειδεῖ C : pyramide 𝒢 || 4 τομὰ δὲ ἔστω τοῦ τε ἐπιπέδου, ἐν ᾧ rest. Heiberg : sectio autem sit plani in quo 𝒢 || 5 πυραμίδος 𝒢 : πυραμίδας C || 6 ἐπιφάνεια 𝒢 : ἐπιφανείας C || 7 τῷ alt. C : om. 𝒢 || καὶ τεμνέσθω ἐπιπέδῳ Heiberg : καὶ τεμνέσθω ἐπιπέδου C quae xop secetur hoc a superficie plani 𝒢 || 8 δέ 𝒢 : om. C || 9 αὐτᾷ 𝒢 : αὐτᾶς C || 10 ἐν 𝒢 : om. C || 12 τῷ στερεῷ τῷ 𝒢 : τῶν στερεῶν C || 14 ΞΟ ms. 𝒢 : ΞΘ ms. C || 14-15 περιφέρεια C : om. 𝒢 || 15 τὰ 𝒢 : τὸ C || ἐστιν C : om. 𝒢 || 16 τὸ C : quae 𝒢 || 17 τὰν Heiberg : τω̅ C || 18 τὰς Heiberg : τὰν C || ΞΟ ms. 𝒢 : ΞΘ ms. C || 19 τὸ C : quae 𝒢 || 20 τῷ alt. 𝒢 : τᾶν C || 21 ἔλασσον Heiberg : ἐλάσσων C || δὲ 𝒢 : δὴ C || 24 αὐτῷ C : ipsius 𝒢.

la grandeur est la même, que les densités sont égales par hypothèse, et que le reste est égal au reste. Il est donc évident que la partie du liquide située suivant l'arc OΠ sera poussée de sa place[1] par la partie située suivant l'arc OΞ, et que le liquide ne sera pas en état de repos. Mais on l'a supposé immobile. Il s'ensuit qu'aucune partie de la grandeur solide n'émergera de la surface du liquide. Immergée, la grandeur solide ne descendra cependant pas vers le fond du liquide ; car toutes les parties du liquide, disposées d'une manière égale, seront comprimées de la même manière, du moment que le solide et le liquide ont (sc. par hypothèse) le même poids (sc. la même densité).

4.

Toute grandeur solide plus légère que le liquide (sc. de même volume), abandonnée dans ce liquide, ne sera pas immergée entièrement, mais une partie sera à l'extérieur de la surface du liquide.

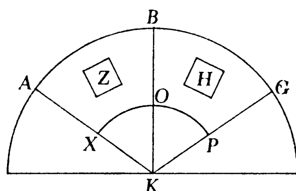


Fig. 88

Soit, en effet, une grandeur solide plus légère que le liquide ; que, abandonnée dans le liquide, elle y soit immergée, si possible, entièrement, et qu'aucune partie d'elle ne soit à l'extérieur de la surface du liquide ; que le liquide soit en état d'immobilité. Imaginons,

1. Cf. les principes précédant la prop. 1.

ἴσον εἶμεν καὶ ἰσοϐαρὲς ὑποκεῖσθαι τὸ στερεὸν ⟨τῷ ὑγρῷ · τὸ δὲ λοιπὸν τῷ λοιπῷ⟩ ἴσον ἐστί. Δῆλον οὖν ὅτι ἐξωθήσεται τὸ μέρος τὸ κατὰ τὰν ΟΠ περιφέρειαν ὑπὸ τοῦ κατὰ τὰν ΟΞ περιφέρειαν, καὶ οὐκ ἐσσεῖται τὸ ὑγρὸν ἀκίνητον. Ὑπόκειται δὲ ἀκίνητον ἐόν · οὐκ ἄρα ὑπερέξει τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας οὐδὲν τοῦ στερεοῦ μεγέθεος. Καταδὺν δὲ τὸ στερεὸν οὐκ οἰσθήσεται ἐς τὰ κάτω · ὁμοίως γὰρ πάντα θλιϐησοῦντι τὰ μέρεα τοῦ ὑγροῦ τὰ ἐξ ἴσου κείμενα διὰ τὸ ἰσοϐαρέα εἶμεν τὸ στερεὸν καὶ τὸ ὑγρόν.

δ'.

Τῶν στερῶν μεγεθέων ὅ κα κουφότερον ᾖ τοῦ ὑγροῦ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν οὐ καταδύσεται ὅλον, ἀλλὰ ἐσσεῖταί τι αὐτοῦ ἐκτὸς τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

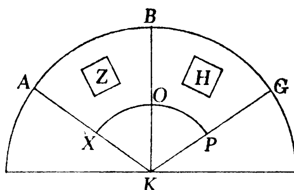


Fig. 88

Ἔστω γὰρ στερεὸν μέγεθος κουφότερον τοῦ ὑγροῦ καὶ ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν δεδυκέτω ὅλον, εἰ δυνατόν, καὶ μηδὲν αὐτοῦ ἔστω ἐκτὸς τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καθεστακέτω δὲ τὸ ὑγρόν, ὥστε μένειν ἀκίνητον. Νοείσθω

1 εἶμεν C : om. 𝒢 ‖ 1-2 τῷ ὑγρῷ · τὸ δὲ λοιπὸν τῷ λοιπῷ rest. Heiberg : cum humido, reliquum autem reliquo 𝒢 ‖ 2 ἴσον Heiberg : ἄνισον 𝒢C ‖ 3 ΟΠ ms. 𝒢 : ΝΟΠ ms. C ‖ 8 θλιϐησοῦντι Heiberg : prementur 𝒢 ἐσσοῦνται C ‖ 9 ἰσοϐαρέα Heiberg : ἰσοϐαρῆ C aeque grave 𝒢 ‖ 9 τὸ στερεὸν 𝒢 : τὸ ὑγρὸν C ‖ 9-10 καὶ τὸ ὑγρόν C : om. 𝒢 ‖ 12 ὅ 𝒢 : εἴ C.

dès lors, un plan passant par le centre de la terre et à travers le liquide et la grandeur solide ; que l'intersection entre ce plan et la surface du liquide soit l'arc ΑΒΓ (sc. ABG), que l'intersection entre ce plan et la grandeur solide soit la figure Z ; soit K le centre de la terre ; imaginons une pyramide comprenant la figure Z, comme précédemment[1], et ayant pour sommet le point K ; que ses plans (sc. ses faces) soient coupés par le plan ΑΒΓ suivant les droites AK et KB ; prenons une autre pyramide, égale et semblable à la première ; que ses plans (sc. ses faces) soient coupés par le plan (sc. ΑΒΓ) suivant les droites KB et ΚΓ ; décrivons dans le liquide, autour de K comme centre, mais au-dessous de la grandeur solide, une autre surface de sphère, dont l'intersection avec le même plan soit l'arc ΞΟΠ ; imaginons une grandeur H, découpée dans le liquide et située dans la seconde pyramide ; que cette grandeur soit égale à la grandeur solide Z ; dès lors, les parties du liquide dans la première pyramide, qui s'étendent sous la surface marquée par l'arc ΞΟ, et celles dans la deuxième pyramide, qui s'étendent sous la surface marquée par l'arc ΟΠ, sont disposées de la même manière et contiguës les unes aux autres. Mais elles sont comprimées d'une manière inégale ; car celles qui sont dans la première pyramide sont comprimées par la grandeur solide Z et par le liquide qui l'entoure et qui est contenu dans la région de la pyramide marquée par les points A, B, O, Ξ, et celles qui sont dans la seconde pyramide sont comprimées par le liquide qui les entoure et qui est contenu dans

1. Cf. prop. 3.

δή τι ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διὰ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς καὶ διὰ τοῦ ὑγροῦ καὶ τοῦ στερεοῦ μεγέθεος, τεμνέσθω δὲ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἡ μὲν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνεια κατὰ τὰν ΑΒΓ περιφέρειαν, τὸ δὲ στερεὸν μέγεθος κατὰ τὸ σχῆμα, ἐν ᾧ Ζ, κέντρον δὲ ἔστω τᾶς γᾶς τὸ Κ, νοείσθω δέ τις πυραμὶς περιλαμβάνουσα τὸ Ζ σχῆμα, καθ' ἃ καὶ πρότερον, κορυφὰν ἔχουσα τὸ Κ σαμεῖον, τεμνέσθω δὲ αὐτᾶς τὰ ἐπίπεδα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ κατὰ τὰς ΑΚ, ΚΒ, λελάφθω δέ τις καὶ ἄλλα ἴσα πυραμὶς καὶ ὁμοία ταύτᾳ, τεμνέσθω δὲ αὐτᾶς τὰ ἐπίπεδα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὰς ΚΒ, ΚΓ, γεγράφθω δέ τις καὶ ἄλλας σφαίρας ἐπιφάνεια ἐν τῷ ὑγρῷ περὶ κέντρον τὸ Κ, ὑποκάτω δὲ τοῦ στερεοῦ μεγέθεος, τεμνέσθω δ' αὕτα ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὰν ΞΟΠ περιφέρειαν, νοείσθω δὲ καὶ μέγεθος ἀπολαμβανόμενον τοῦ ὑγροῦ τὸ κατὰ τὸ Η ἐν τᾷ ὕστερον πυραμίδι ἴσον τῷ κατὰ τὸ Ζ στερεῷ· τὰ δὴ μέρεα τοῦ ὑγροῦ τοῦ ἐν τᾷ πρώτᾳ πυραμίδι τὰ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν τὰν κατὰ τὰν ΞΟ περιφέρειαν καὶ τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ τὰ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν τὰν κατὰ τὰν ΟΠ περιφέρειαν ἐξ ἴσου τέ ἐντι κείμενα καὶ συνεχέα ἀλλάλοις. Οὐχ ὁμοίως δὲ θλίβονται· τὸ μὲν γὰρ ἐν τᾷ πρώτᾳ πυραμίδι θλίβεται τῷ κατὰ τὸ Ζ στερεῷ μεγέθει καὶ τῷ περιέχοντι ὑγρῷ αὐτὸ καὶ ἐόντι ἐν τῷ τόπῳ τᾶς πυραμίδος τῷ κατὰ τὰ Α, Β, Ο, Ξ, τὸ δ' ἐν τᾷ ἑτέρᾳ πυραμίδι θλίβεται τῷ ὑγρῷ τῷ περιέχοντι αὐτὸ καὶ ἐόντι τᾶς πυραμίδος ἐν

5 κέντρον — 6 τις rest. Heiberg : centrum autem terrae sit k, intelligatur autem quaedam 𝓛 ‖ 11 ἐπιπέδου C : plano a b g ms. 𝓛 ‖ 14 περιφέρειαν C : om. 𝓛 ‖ 15 τὸ pr. 𝓛 : om. C ‖ 16 τῷ 𝓛 : τὸ C ‖ στερεῷ 𝓛 : στερεόν C ‖ δὴ Heiberg : δὲ codd. ‖ 17-18 τὰν ἐπιφάνειαν C : superficiebus 𝓛 ‖ 18 τὰν alt. 𝓛 : τὰ C ‖ περιφέρειαν C : superficiem 𝓛 ‖ τοῦ Heiberg : τὸ codd. ‖ 19 τὰ 𝓛 : τῶν C ‖ 19 τὰν ἐπιφάνειαν C : superficiebus 𝓛 ‖ τὰν alt. Heiberg : τὸν C ‖ 19-20 περιφέρειαν C : superficiem 𝓛 ‖ 21 τὸ C : quae 𝓛 ‖ 23 αὐτὸ C : ipsam 𝓛 ‖ 24 τῷ C : quae 𝓛.

la région de la pyramide marquée par les points Π, O, B, Γ ; or le poids de Z est inférieur au poids de H, du moment que Z et H ont bien la même grandeur alors que par hypothèse la grandeur solide est plus légère que la grandeur liquide, et parce que, de plus, les poids des portions de fluide entourant les grandeurs Z et H dans chacune des pyramides sont égaux ; il s'ensuit que la partie du liquide située au-dessous de la surface marquée par l'arc OΠ sera comprimée davantage ; elle poussera donc de sa place la partie moins comprimée, et le liquide ne restera pas immobile[1]. Mais on l'avait supposé immobile ; par conséquent, (sc. la grandeur solide) ne sera pas immergée entièrement, mais une de ses parties sera à l'extérieur de la surface du liquide.

5.

Toute grandeur solide plus légère qu'un liquide (sc. de même volume), abandonnée dans ce liquide, y sera immergée jusqu'à un niveau tel que le liquide qui occuperait le volume de la partie immergée a le même poids que la grandeur entière.

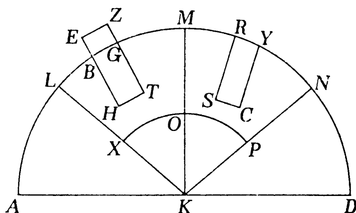


Fig. 89

Contruisons la même figure que plus haut. Que le liquide soit en état de repos ; soit EZHΘ une grandeur

1. Cf. les principes préc. la prop. 1.

τῷ τόπῳ τῷ κατὰ τὰ Π, Ο, Β, Γ, ἔστι δὲ τὸ βάρος τὸ κατὰ ⟨τὸ Ζ ἔλασσον τοῦ βάρεος τοῦ κατὰ τὸ⟩ Η, ἐπειδὴ τῷ μὲν μεγέθει ἴσον ἐστίν, κουφότερον δὲ ὑπόκειται τὸ στερεὸν μέγεθος εἶμεν τοῦ ὑγροῦ, τὰ δὲ τοῦ περιέχοντος ὑγροῦ τὰ Ζ, Η μεγέθεα ἐν ἑκατέρᾳ τᾶν πυραμίδων ἴσα· μᾶλλον οὖν θλιβήσεται τὸ μέρος τοῦ ὑγροῦ τὸ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν τὰν κατὰ τὰν ΟΠ περιφέρειαν· ἐξωθήσει οὖν τὸ ἧσσον θλιβόμενον, καὶ οὐ μενεῖ τὸ ὑγρὸν ἀκίνητον. Ὑπέκειτο δέ· οὐκ ἄρα καταδύσεται ὅλον, ἀλλ᾽ ἐσσεῖταί τι αὐτοῦ ἐκτὸς τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

ε′.

Τῶν στερεῶν μεγεθέων ὅ κα ᾖ κουφότερον τοῦ ὑγροῦ, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν ἐς τοσοῦτο καταδύσεται, ὥστε ταλικοῦτον ὄγκον τοῦ ὑγροῦ, ἁλίκος ἐστὶν ὁ τοῦ καταδεδυκότος ὄγκος, ἴσον βάρος ἔχειν ὅλῳ τῷ μεγέθει.

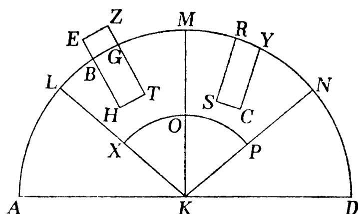


Fig. 89

Κατεσκευάσθω ταὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ ἔστω τὸ ὑγρὸν ἀκίνητον, ἔστω δὲ κουφότερον τοῦ ὑγροῦ τὸ

1 τὰ Heiberg : τὸ C ‖ 2 τὸ Ζ ἔλασσον τοῦ βάρεος τοῦ κατὰ τὸ rest. Heiberg : z minor grauitate humidi quod secundum ℒ ‖ Η ms. ℒ : ΖΗ ms. C ‖ 4 τοῦ alt. add. Heiberg ‖ 5 ἐν ἑκατέρᾳ Heiberg : ἑκατέρα C utraque ℒ ‖ 6-7 τὰν ἐπιφάνειαν Heiberg : τὴν ἐπιφάνειαν C superficiebus ℒ ‖ 8 ἧσσον ℒ : ἶ^{σ}ον C ‖ 9 ἐσσεῖταί Heiberg : ἔσσεται C ‖ 13 ἐς add. Heiberg ‖ 16 κατεσκευάσθω Heiberg : κατασκευάσθω C disponantur autem ℒ.

plus légère que le liquide. Du moment donc que le liquide est en état de repos, les parties de ce liquide qui sont disposées d'une manière égale subissent une compression égale[1] ; seront donc comprimés de la même manière le liquide qui s'étend sous la surface contenant l'arc ΞΟ et le liquide qui s'étend sous la surface contenant l'arc ΠΟ, de façon que les poids qui les compriment sont égaux. Or le poids du liquide contenu dans la première pyramide, au solide ΒΗΘΓ près, est égal au poids du liquide contenu dans la seconde pyramide, au liquide ΡΣΤΥ près. Il est donc évident que le poids de la grandeur ΕΖΗΘ est égal au poids du liquide ΡΣΤΥ. Il est donc manifeste que le liquide qui occuperait le volume de la partie immergée de la grandeur solide a le même poids que cette grandeur entière.

6.

Les corps solides plus légers qu'un liquide (sc. de même volume), plongés par force dans ce liquide, sont renvoyés vers le haut avec une force égale au poids dont le liquide, qui occuperait le même volume que la grandeur solide, l'emporte sur le poids de cette grandeur.

Soit Α une certaine grandeur plus légère qu'un liquide, Β le poids de la grandeur Α, la somme de Β et Γ le poids du liquide ayant le même volume que la grandeur Α. Il faut démontrer que la grandeur Α,

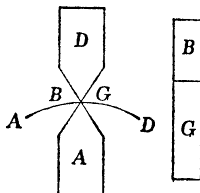


Fig. 90

1. Cf. les principes préc. la prop. 1.

ΕΖΗΘ μέγεθος. Ἐπεὶ οὖν ἀκίνητόν ἐστιν τὸ ὑγρόν, ὁμοίως θλιβήσεται τὰ μέρεα αὐτοῦ τὰ ἐξ ἴσου κείμενα· ὁμοίως ἄρα θλιβήσεται τὸ ὑγρὸν τὸ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν τὰν κατὰ τὰς ΞΟ καὶ ΠΟ περιφερείας· ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ βάρος, ᾧ θλίβονται. Ἔστι δὲ καὶ τοῦ ὑγροῦ τὸ βάρος τοῦ ἐν τᾷ πρώτᾳ πυραμίδι χωρὶς τοῦ ΒΗΘΓ στερεοῦ ἴσον τῷ βάρει τῷ ⟨τοῦ ἐν τᾷ ἑτέρᾳ πυραμίδι⟩ χωρὶς τοῦ ΡΣΤΥ ὑγροῦ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ τοῦ ΕΖΗΘ μεγέθεος βάρος ἴσον ἐστὶ τῷ τοῦ ΡΣΤΥ ὑγροῦ βάρει. Φανερὸν οὖν ὅτι ταλικοῦτος ὄγκος τοῦ ὑγροῦ, ἁλίκον ἐστὶ τὸ δεδυκὸς τοῦ στερεοῦ μεγέθεος, ἴσον βάρος ἔχει ὅλῳ τῷ μεγέθει.

ϛ′.

Τὰ κουφότερα στερεὰ τοῦ ὑγροῦ βιασθέντα εἰς τὸ ὑγρὸν ἀναφέρεται τοσαύτᾳ βίᾳ ἐς τὸ ἄνω, ὅσον ἐστὶ τὸ βάρος, ᾧ βαρύτερόν ἐστι τοῦ μεγέθεος τὸ ὑγρὸν τὸ ἴσον ὄγκον ἔχον τῷ μεγέθει.

Ἔστω τι μέγεθος τὸ Α κουφότερον τοῦ ὑγροῦ, ἔστω δὲ τοῦ μὲν μεγέθεος τοῦ ἐν ᾧ Α βάρος τὸ Β, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος τῷ Α τὸ ΒΓ. Δεικτέον ὅτι τὸ

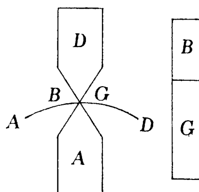


Fig. 90

4 τὰς ΞΟ Heiberg : τὰς ΝΞΟ ms. C || περιφερείας Heiberg : περιφέρειαν C || 5 τοῦ alt. Heiberg : τὸ C || 6 ΒΗΘΓ ms. 𝔊 : ΒΗΘ ms. C || 7 τοῦ ἐν τᾷ ἑτέρᾳ πυραμίδι rest. Heiberg : humidi quod in altera pyramide 𝔊 || 14-15 ὅσον ἐστὶ τὸ βάρος C : om. 𝔊 || 15 ᾧ Heiberg : ὃ C quanto 𝔊 || 17 τι C enim 𝔊.

plongée par force dans le liquide, sera renvoyée vers le haut avec une force égale au poids Γ.

Donnons-nous en effet une certaine grandeur Δ ayant un poids égal au poids Γ. La grandeur constituée par la somme des deux grandeurs A et Δ est donc plus légère que le liquide ; car le poids de la grandeur somme de ces deux grandeurs est B+Γ, et le poids du liquide ayant le même volume que cette grandeur (sc. A+Δ) est supérieur à B+Γ, puisque B+Γ est le poids du liquide ayant le même volume que la grandeur A. Abandonnée, par conséquent, dans le liquide, la grandeur somme des deux grandeurs A et Δ sera immergée jusqu'à un niveau tel que le liquide qui occuperait le volume de la partie immergée de la grandeur (sc. donnée) a le même poids que la grandeur entière, comme cela a été démontré[1]. Que l'arc ABΓΔ soit (c'est-à-dire marque) la surface d'un certain liquide. Puisque, dans ces conditions, le liquide qui occuperait un volume égal à celui de la grandeur A a le même poids que la somme des grandeurs A et Δ, il est évident que la partie immergée de cette somme sera la grandeur A, et que le reste de cette somme, à savoir la grandeur Δ, sera entièrement au-dessus de la surface du liquide. Car si le solide était immergé d'une autre manière, ce serait contraire à ce qui a été démontré plus haut[2]. Il est donc évident que la grandeur A est poussée vers le haut avec une force égale à celle avec laquelle la grandeur Δ, située au-dessus d'elle la pousse vers le bas[3], puisqu'aucune des deux forces ne cède à l'autre. Mais la grandeur Δ presse vers le bas d'un poids égal à Γ, du moment qu'on avait supposé le poids de la grandeur Δ égal au poids Γ. La proposition qu'il fallait démontrer est donc évidente.

1. Cf. prop. 5.
2. Les manuscrits présentant une lacune à cet endroit du texte, le raisonnement de la dernière phrase est reconstitué d'après les conjectures de Heiberg.
3. Trad. d'après les conjectures de Heiberg.

Α μέγεθος βιασθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν ἀνοισεῖται ἐς τὸ ἐπάνω τοσαύτᾳ βίᾳ, ὅσον ἐστὶ τὸ βάρος τὸ Γ.

Λελάφθω γάρ τι μέγεθος τὸ ἐν ᾧ τὸ Δ βάρος ἴσον ἔχον τῷ Γ· τὸ δὴ μέγεθος τὸ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ἐν οἷς Α, Δ μεγεθέων ἐς τὰ αὐτὰ συντεθέντων κουφότερόν ἐστι τοῦ ὑγροῦ· ἔστι γὰρ τοῦ μὲν μεγέθεος τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων βάρος τὸ ΒΓ, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος αὐτῷ μεῖζον τοῦ ΒΓ διὰ τὸ τοῦ ἴσον ἔχοντος ὄγκον τῷ τοῦ Α τὸ βάρος εἶμεν τὸ ΒΓ. Ἀφεθὲν οὖν ἐς τὸ ὑγρὸν τὸ μέγεθος τὸ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν Α, Δ συγκείμενον ἐς τοσοῦτον δύσεται, ⟨ἔστε κα ταλικοῦτος ὄγκος τοῦ⟩ ὑγροῦ, ἁλίκον καὶ τὸ δεδυκὸς τοῦ μεγέθεος, ἴσον βάρος ἔχῃ τῷ ὅλῳ μεγέθει· δέδεικται γὰρ τοῦτο. Ἔστω δὴ ἐπιφάνειά τινος ὑγροῦ ἁ ΑΒΓΔ περιφέρεια. Ἐπεὶ οὖν ὁ ταλικοῦτος ὄγκος τοῦ ὑγροῦ, ἁλίκον ἐστὶ τὸ Α μέγεθος, ἴσον βάρος ἔχει τοῖς Α, Δ μεγέθεσιν, δῆλον ὅτι τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ Α μέγεθος, τὸ δὲ λοιπὸν αὐτοῦ, ἐν ᾧ Δ, ἐσσεῖται ὅλον ὑπὲρ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας· εἰ γὰρ α... δέδυκεν τὸ στερεόν, ἕπεται...... τούτου δεδειγμένου. Δῆλον οὖν ὅτι ..... ἐς τὸ ἄνω φέρεται τὸ Α μέγεθος.......... .... ὑπὸ τοῦ ἄνω τοῦ Δ ἐς τὸ κάτω, ἐπεὶ οὐδέτερον ὑπ' οὐδετέρου ἐξωθεῖτο. Ἀλλὰ τὸ Δ ἐς τὸ κάτω θλίβει τοσούτῳ βάρει, ἁλίκον ἐστὶ τὸ Γ· ὑπέκειτο γὰρ τὸ βάρος τοῦ ἐν ᾧ τὸ Δ εἶμεν ἴσον τῷ Γ· δῆλον οὖν ὃ ἔδει δεῖξαι.

5 συντεθέντων Heiberg : συντεθὲν codd. || 7-8 αὐτῷ μεῖζον C : ipsis est maior 𝓛 || 9 ἀφεθὲν οὐν ἐς Heiberg : ἀφεθὲν οὖν ἔστω C dimittatur igitur in 𝓛 || 10 συγκείμενον 𝓛 : συγκειμένων C || 11 ἔστε κα — τοῦ rest. Heiberg : donec tanta moles 𝓛 || ἁλίκον 𝓛 : ἄδικον C || 12 καὶ C : est 𝓛 || ἔχῃ 𝓛 : ἔχει C || 13 δὴ Heiberg : δὲ codd. || 14 περιφέρεια 𝓛 : περιφερείας C || 18 εἰ γὰρ — 19 δεδειγμένου C : si enim (seq. lacuna) 𝓛 || 19 sq. restitutio incerta || 20 δῆλον — 21 κάτω C : palam igitur quod quanta ui magnitudo a refertur ad superius tanta premitur ad inferius 𝓛 || 21 τὸ Heiberg : τῷ C || 24 τοῦ 𝓛 : τὸ C.

7.

Les grandeurs plus lourdes qu'un liquide (sc. de même volume), abandonnées dans ce liquide, descendent vers le bas jusqu'à ce qu'elles aient atteint le fond, et elles seront allégées dans le liquide du poids du liquide contenu dans un volume égal au volume de la grandeur solide.

Il est évident que ces grandeurs descendront vers le bas, jusqu'à ce qu'elles aient atteint le fond ; car les parties du liquide qui s'étendent au-dessous d'une telle grandeur subiront une plus forte compression que les parties qui sont au niveau de ces grandeurs, du moment qu'on a supposé la grandeur solide plus lourde que le liquide ; il reste à démontrer que ces grandeurs seront allégées comme nous venons de l'indiquer.

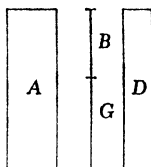


Fig. 91

Soit la grandeur A, plus lourde que le liquide (sc. de même volume) ; soit $B+\Gamma$ le poids de la grandeur A, B le poids du liquide contenu dans un volume égal à celui de la grandeur A. Il faut démontrer que la grandeur A, plongée dans le liquide, aura un poids égal à Γ.

Prenons, en effet, une certaine grandeur Δ plus légère que le liquide contenu dans un volume égal à celui de Δ ; que le poids de la grandeur Δ soit égal au

ζ'.

Τὰ βαρύτερα τοῦ ὑγροῦ ἀφεθέντα εἰς τὸ ὑγρὸν οἰσεῖται κάτω, ἔστ' ἂν καταβᾶντι, καὶ ἐσσοῦνται κουφότερα ἐν τῷ ὑγρῷ τοσοῦτον, ὅσον ἔχει τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ τοῦ ταλικοῦτον ὄγκον ἔχοντος, ἁλίκος ἐστὶν ὁ τοῦ στερεοῦ μεγέθεος ὄγκος.

Ὅτι μὲν οὖν οἰσεῖται ἐς τὸ κάτω, ἔστ' ἂν καταβᾶντι, δῆλον· τὰ γὰρ ὑποκάτω αὐτοῦ μέρεα τοῦ ὑγροῦ θλιβησοῦνται μᾶλλον τῶν ἐξ ἴσου αὐτοῖς κειμένων μερέων, ἐπειδὴ βαρύτερον ὑπόκειται τὸ στερεὸν μέγεθος τοῦ ὑγροῦ· ὅτι δὲ κουφότερα ἐσσοῦνται, ὡς εἴρηται, δειχθήσεται.

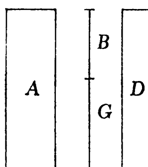


Fig. 91

Ἔστω τι μέγεθος τὸ Α, ὅ ἐστι βαρύτερον τοῦ ὑγροῦ, βάρος δὲ ἔστω τοῦ μὲν ἐν ᾧ Α μεγέθεος τὸ ΒΓ, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος τῷ Α τὸ Β. Δεικτέον ὅτι τὸ Α μέγεθος ἐν τῷ ὑγρῷ ἐὸν βάρος ἕξει ἴσον τῷ Γ.

Λελάφθω γάρ τι μέγεθος τὸ ἐν ᾧ τὸ Δ ⟨κουφότερον τοῦ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος αὐτῷ, ἔστω⟩ δὲ τοῦ μὲν ἐν ᾧ τὸ Δ μεγέθεος βάρος ἴσον τῷ Β βάρει, τοῦ δὲ

7 ἔστ' ἂν καταβᾶντι Heiberg : εστου κατ' βαντι 𝔏 καταβᾶντι incertum in C ‖ 8 αὐτοῦ C : ipsis 𝔏 ‖ 13 τι C : enim aliqua 𝔏 ‖ τὸ 𝔏 : om. fort. C ‖ 17 τι C : aliqua alia 𝔏 ‖ κουφότερον — 19 βάρει rest. Heiberg : leuior humido molis aequalis cum ipsa, sit autem magnitudinis quidem in qua d grauitas aequalis grauitati b ms. 𝔏 ‖ 19 μεγέθεος βάρος Heiberg : μέγεθος βάρει C ‖ βάρει Heiberg : βάρος C.

poids B, et le poids du liquide ayant le même volume que Δ égal au poids B+Γ. Si on réunissait, dès lors, en une seule grandeur les deux grandeurs A et Δ, la grandeur ainsi composée aurait le même poids que le liquide (sc. contenu dans un volume égal à la somme des volumes de A et de Δ) ; car le poids de la somme de ces deux grandeurs est égal à la somme des poids B+Γ et B, et d'autre part le poids du liquide ayant un volume égal à la somme des volumes des deux grandeurs est égal à la somme des mêmes poids. Abandonnées dans le liquide, les deux grandeurs feront donc équilibre au liquide sans monter vers le haut ni descendre vers le bas ; ainsi donc la grandeur A tendra bien à descendre, mais sera tirée avec la même force vers le haut par la grandeur Δ, alors que la grandeur Δ, du moment qu'elle est plus légère que le liquide, tendra à monter avec une force égale au poids Γ ; on a démontré, en effet, que les grandeurs solides plus légères qu'un liquide (sc. de même volume), plongées par force dans ce liquide, tendent à remonter vers le haut avec une force égale au poids dont le liquide, qui occuperait le même volume que la grandeur, l'emporte sur le poids de la grandeur[1]. Or le liquide contenu dans un volume égal à celui de la grandeur Δ est plus lourd que Δ d'un poids égal à Γ ; il est donc évident que la grandeur A tendra elle aussi à descendre avec une force égale au poids Γ.

Nous supposerons que toutes les grandeurs qui, dans un liquide, tendent vers le haut y montent suivant la verticale menée par leur centre de gravité.

1. Cf. prop. 6.

ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος τῷ Δ μεγέθει τὸ βάρος ἔστω ἴσον τῷ ΒΓ βάρει. Συντεθέντων δὴ ἐς τὸ αὐτὸ τῶν μεγεθέων, ἐν οἷς τὰ Α, Δ, τὸ τῶν συναμφοτέρων μέγεθος ἰσοβαρὲς ἐσσεῖται τῷ ὑγρῷ· ἔστι γὰρ τῶν μεγεθέων συναμφοτέρων τὸ βάρος ἴσον συναμφοτέροις τοῖς βάρεσιν τῷ τε ΒΓ καὶ τῷ Β, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος ἀμφοτέροις τοῖς μεγέθεσι τὸ βάρος ἴσον ἐστὶ τοῖς αὐτοῖς βάρεσιν. Ἀφεθέντων οὖν τῶν μεγεθέων ἐς τὸ ὑγρὸν ἰσορροπησοῦνται τῷ ὑγρῷ καὶ οὔτε εἰς τὸ ἄνω οἰσοῦνται οὔτε εἰς τὸ κάτω· διὸ τὸ μὲν ἐν ᾧ Α μέγεθος οἰσεῖ ⟨ται ἐς τὸ κάτω καὶ τοσαύτᾳ βίᾳ ὑ⟩πὸ τοῦ ἐν ᾧ Δ μεγέθεος ἀνέλκεται ἐς τὸ ἄνω, τὸ δὲ ἐν ᾧ Δ μέγεθος, ἐπεὶ κουφότερόν ἐστι τοῦ ὑγροῦ, ἀνοισεῖται εἰς τὸ ἄνω τοσαύτᾳ βίᾳ, ὅσον ἐστὶ τὸ Γ βάρος· δέδεικται γὰρ ὅτι τὰ κουφότερα τοῦ ὑγροῦ μεγέθεα στερεὰ βιασθέντα ἐς τὸ ὑγρὸν ἀναφέρονται τοσαύτᾳ βίᾳ ἐς τὸ ἄνω, ὅσον ἐστὶ τὸ βάρος, ᾧ βαρύτερόν ἐστι τοῦ μεγέθεος τὸ ὑγρὸν τὸ ἴσογκον τῷ μεγέθει. Ἔστι δὲ τῷ Γ βάρει βαρύτερον τοῦ Δ μεγέθεος τὸ ὑγρὸν τὸ ἴσον ὄγκον ἔχον τῷ Δ· δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐν ᾧ Α μέγεθος ἐς τὸ κάτω οἰσεῖ ⟨ται τοσούτῳ βάρει, ὅσον ἐστὶ τὸ Γ⟩.

Ὑποκεί⟨σθω τῶν ἐν τῷ ὑγρῷ ἄνω⟩ φερομένων ἕκαστον ἀναφέρεσθαι κατὰ τὰν κάθετον τὰν διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βάρεος αὐτοῦ ἀγμέναν.

2 ἐς τὸ αὐτὸ C : om. ℒ || 8 ἐς C : et proiectis in ℒ || 9-10 οἰσοῦνται οὔτε εἰς τὸ κάτω Heiberg : om. C neque ad deorsum ℒ || 11 ἐς τὸ κάτω καὶ τοσαύτᾳ βίᾳ rest. Heiberg : ad deorsum et tanta vi ℒ || 11 ἐν ℒ : ευ ἐν C || 12 ἐς τὸ ἄνω C : om. ℒ || 16 ὅσον ἐστὶ τὸ βάρος C : om. ℒ || ᾧ Heiberg : ὡς C quanto ℒ || 17 ἴσογκον Heiberg : ἴσον ὄγκον C aeque molis ℒ || τῷ μεγέθει ℒ : τῷ Δ μεγέθει C || 19 τὸ add. Heiberg || 20-21 ἐς τὸ κάτω — τὸ Γ rest. Heiberg : fertur in deorsum tanta grauitate quanta est g ms. ℒ || 22 ὑποκείσθω — ἄνω rest. Heiberg : supponatur eorum quae in humido sursum ℒ || 24 αὐτοῦ Heiberg : ipsorum ℒ.

8.

Si une grandeur solide, plus légère qu'un liquide, ayant la figure d'un segment sphérique, est abandonnée dans ce liquide de manière que la base du segment ne soit pas en contact avec le liquide, la figure se dressera droite, de façon que l'axe du segment soit orienté suivant la verticale ; et si la figure se trouve tirée par quelque force de manière que la base du segment touche le liquide, elle ne restera pas inclinée si on l'abandonne, mais se redressera droite.

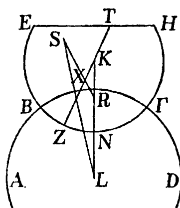


Fig. 92

Imaginons en effet une certaine grandeur, telle que nous venons de l'indiquer, abandonnée dans un liquide, et un plan passant par l'axe du segment et par le centre de la terre. Soit ΑΒΓΔ la section de la surface du liquide, l'arc ΕΖΗΘ la section de la figure abandonnée dans le liquide ; soit ΘΖ l'axe du segment. Le centre de la sphère est donc situé sur la droite ΘΖ.

En premier lieu, si le segment est supérieur à l'hémisphère, que le centre soit K, et que la figure soit, si possible, inclinée, soit par l'effet de quelque force,

η′.

Εἴ κα στερεόν τι μέγεθος κουφότερον τοῦ ὑγροῦ σφαίρας τμάματος ἔχον σχῆμα εἰς τὸ ὑγρὸν ἀφεθῇ οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν τοῦ τμάματος μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, ὀρθὸν καταστασεῖται τὸ σχῆμα οὕτως, ὥστε τὸν ἄξονα τοῦ τμάματος κατὰ κάθετον εἶμεν· καὶ εἴ κα ὑπό τινος ἕλκηται τὸ σχῆμα οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν τοῦ τμάματος ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, οὐ μενεῖ κεκλιμένον, εἴ κα ἀφεθῇ, ἀλλ᾽ ὀρθὸν ἀποκαταστασεῖται.

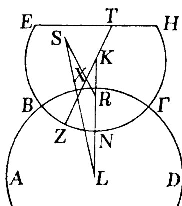


Fig. 92

Νοείσθω γάρ τι μέγεθος, οἷον εἴρηται, ἐς τὸ ὑγρὸν ἀφε⟨θέν, καὶ διά τε τοῦ ἄξονος τοῦ⟩ τμάματος καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς νοείσθω ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον, τομὰ δ᾽ ἔστω τᾶς μὲν ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἁ ΑΒΓΔ, τοῦ δὲ σχήματος τοῦ ἐς τὸ ὑγρὸν ἀφεθέντος ἁ ΕΖΗΘ περιφέρεια, ἄξων δὲ τοῦ τμάματος ἔστω ἁ ΘΖ· τὸ δὴ κέντρον τᾶς σφαίρας ἔστιν ἐπὶ τᾶς ΘΖ.

Πρῶτον μέν, εἰ μεῖζόν ἐστιν ἡμισφαιρίου τὸ τμᾶμα, ἔστω τὸ Κ, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, κεκλιμένον τὸ σχῆμα

2 κουφότερον τοῦ ὑγροῦ C : om. 𝔚 ‖ 5 καταστασεῖται Heiberg : καταστασεῖτε C insidebit 𝔚 ‖ 8 εἴ 𝔚 : ὡς εἴ C ‖ 10 τὸ Heiberg : τῷ C ‖ 15 ἁ scripsi : ὁ C.

soit par elle-même. Ce qu'il faut démontrer, c'est qu'elle ne restera pas (sc. dans cette position), mais qu'elle se redressera droite, de manière que les points Z et Θ soient situés sur la (sc. même) verticale.

En effet, la figure étant supposée inclinée, les points Z et Θ ne sont pas sur la (sc. même) verticale. Menons donc par les points K et Λ la droite KΛ et supposons que Λ soit le centre de la terre. La (sc. partie de la) figure enveloppée, dans le liquide, par la surface du liquide a donc son axe sur la droite KΛ ; car si deux surfaces sphériques se coupent l'une l'autre, la figure d'intersection est un cercle perpendiculaire à la droite joignant les centres des deux sphères[1]. Le centre de gravité de la figure enveloppée dans le liquide suivant l'arc BNΓ est donc situé sur la droite KΛ. Soit P ce centre de gravité. Mais le centre de gravité du segment entier, suivant l'arc ΘHZE, est situé sur la droite ZΘ ; soit Ξ ce centre de gravité. Il s'ensuit que le centre de gravité de la partie de la figure restante, située en dehors de la surface du liquide, se trouve sur le prolongement de PΞ, à l'extrémité Σ d'un segment de droite ΣΞ tel que le rapport de ΣΞ à ΞP est égal au rapport du poids de la partie du segment (sc. de sphère) suivant l'arc BNΓ au poids de la partie du segment qui est à l'extérieur du liquide ; car cette propriété a été démontrée[2]. Soit donc Σ le centre de gravité de la figure indiquée. Du moment que le poids de la figure située à l'extérieur du liquide tend vers le bas suivant la droite ΛΣ, et que la partie de la figure située dans le liquide tend vers le haut[3] suivant la droite PK, il est évident que la figure ne restera pas en état de repos, mais que ses parties situées du côté de E se

1. Cf. Eucl. I, 4, 8, 13 ; III, 9 ; XI, 4.
2. Cf. *De l'équil. des fig. planes*, I, 8.
3. Cf. prop. 7.

ἤτοι ὑπό τινος κλιθὲν ἢ καθ' αὑτό. Δεικτέον οὖν ὅτι οὐ μενεῖ, ἀλλ' εἰς ὀρθὸν ἀποκαταστασεῖται, ὥστε τὰ Ζ, Θ κατὰ κάθετον εἶμεν.

Ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται κεκλίσθαι τὸ σχῆμα, οὐκ ἔστι τὰ Ζ, Θ κατὰ κάθετον. Ἄχθω δὴ διὰ τοῦ Κ καὶ τοῦ Λ ἁ ΚΛ, τὸ δὲ Λ κέντρον ὑποκείσθω τᾶς γᾶς· τὸ δὴ σχῆμα τὸ ἐν τῷ ὑγρῷ ἀπολελαμμένον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τὸν ἄξονα ἔχει ἐπὶ τᾶς ΚΛ· εἰ γάρ κα δύο σφαιρᾶν ἐπιφάνειαι τέμνωντι ἀλλάλας, ἁ τομὰ κύκλος ἐστὶν ὀρθὸς ποτὶ τὰν εὐθεῖαν τὰν ἐπιζευγνύουσαν τὰ κέντρα τᾶν σφαιρᾶν. Ἔστιν οὖν τοῦ σχήματος τοῦ κατὰ τὰν ΒΝΓ περιφέρειαν ἀπολαμβανομένου ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΚΛ· ἔστω τὸ Ρ. Τοῦ δὲ τμάματος ὅλου τοῦ κατὰ τὰν ΘΗΖΕ περιφέρειαν τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΖΘ· ἔστω τὸ Ξ. Τοῦ ἄρα ⟨λοιποῦ σχήματος τοῦ ἐκτὸς⟩ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΡΞ ἐστὶν ἐκβληθείσας καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς τᾶς ΣΞ ποτὶ τὰν ΞΡ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχούσας, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ κατὰ τὰν ΒΝΓ περιφέρειαν τοῦ τμάματος ποτὶ τὸ βάρος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ· δέδεικται γὰρ ταῦτα. Ἔστω δὴ τὸ Σ κέντρον τοῦ εἰρημένου σχήματος. Ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν σχήματος, ὅ ἐστιν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ, τὸ βάρος ἐς τὸ κάτω φέρεται κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν ΛΣ, τὸ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ ἐς τὸ ἄνω κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν ΡΚ, δῆλον ὡς οὐ μενεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὰ ποτὶ τῷ Ε μέρεα αὐτοῦ

1 καθ' αὑτό Heiberg : ταὐτό C ‖ 5 Θ Heiberg : Ε ms. C ‖ 5-6 Λ ἁ ΚΛ Heiberg : ΛΑΚΛ ms. C ‖ 9 τέμνωντι Heiberg : τέμνοντι C ‖ ὀρθὸς Heiberg : ὀρθὸν C ‖ 10-11 τᾶν σφαιρᾶν Heiberg : τᾶς σφαίρας C ‖ 11 ΒΝΓ Heiberg : ΒΗΓ ms. C ‖ 14 ΘΗΖΕ Heiberg : ΘΗΖ ms. C ‖ 17 ἐστὶν add. Heiberg ‖ 18 ΣΞ Heiberg : ΕΞ ms. C ‖ ἐχούσας add. Heiberg ‖ 23 κατὰ Heiberg : κα C ‖ 24 ἐν Heiberg : ΕΝ ms. C ‖ ἐς τὸ ἄνω Heiberg : ἔστω ἂν C ‖ τὰν εὐθεῖαν τὰν Heiberg : τᾶς εὐθείας τᾶς C ‖ 25 τῷ Ε Heiberg : τὰν ΕΗ ms. C.

déplaceront vers le bas, alors que les parties situées du côté de H iront vers le haut, et elles se déplaceront de cette manière jusqu'à ce que la droite ZΘ s'oriente suivant la verticale. La droite ZΘ une fois orientée suivant la verticale, les centres de gravité de la partie située dans le liquide et de la partie située hors du liquide se trouveront sur la même verticale, puisqu'ils seront situés sur la droite ZΘ. Les poids se comprimeront donc l'un l'autre en sens contraire suivant la même verticale, l'un tendant vers le haut, l'autre vers le bas. La figure restera par conséquent en état de repos, aucune de ses deux parties n'étant poussée de sa place par l'autre.

La proposition reste vraie aussi pour les cas où la figure est un hémisphère ou un segment inférieur à un hémisphère.

9.

De même dans le cas où la (sc. même) figure plus légère que le liquide est abandonnée dans le liquide de manière que sa base soit entièrement dans le liquide, la figure se dressera droite de façon que son axe soit dans la direction de la verticale.

Fig. 93

ἐς τὸ κάτω οἰσοῦνται, τὰ δὲ ποτὶ τῷ Η ἐς τὸ ἄνω, καὶ ἀεὶ ἐς τὸ αὐτὸ οἰσοῦνται, ἕως κα ἁ ΖΘ κατὰ κάθετον γένηται. Κατὰ κάθετον δὲ γενομένας τᾶς ΖΘ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐσσοῦνται τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ καὶ τοῦ ἐκτος ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς καθέτου· ἐπὶ γὰρ τᾶς ΖΘ ἐσσοῦνται· ἀντιθλιψοῦνται οὖν ἀλλήλοις τὰ βάρεα κατὰ τὰν αὐτὰν κάθετον, τὸ μὲν ἐς τὸ κάτω φερόμενον, τὸ δὲ ἐς τὸ ἄνω. Ὥστε μένει τὸ σχῆμα· οὐδέτερον γὰρ ὑπ' οὐδετέρου ἐξωθήσεται.

Τὰ δ' αὐτὰ ἐσσεῖται καὶ εἴ κα τὸ σχῆμα ἡμισφαίριον ᾖ ἢ ἔλασσον ἡμισφαιρίου.

θ′.

Καὶ τοίνυν, εἴ κα τὸ σχῆμα κουφότερον ἐὸν τοῦ ὑγροῦ ἀφεθῇ ἐς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, ὀρθὸν καταστασεῖται τὸ σχῆμα οὕτως, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ κατὰ κάθετον εἶμεν.

Fig. 93

1 ἐς τὸ pr. Heiberg : ἔστω C ‖ τῷ Η ἐς τὸ Heiberg : τὰν Η ἔστω C ‖ 5 ἐπὶ γὰρ Heiberg : ἐπιγραφὰς C ‖ 6 βάρεα Heiberg : β.α ms. C ‖ 7 ἐς τὸ pr. Heiberg : ἔστω C ‖ ἐς τὸ alt. Heiberg : ἔστω C ‖ 9 ἐξωθήσεται scripsi (e p. 11, l. 3, cf. Heiberg, III, Index I, ἐξωθέω) : ἐξωθήσει (?) C ‖ 10 κα Heiberg : κατὰ C ‖ 11 ἢ Heiberg : τῇ C ‖ ἔλασσον Heiberg : ἐλάσσων C ‖ 13 εἴ κα Heiberg : si 𝔏 : εἰσ C ‖ 15 καταστασεῖται Heiberg : κατατασεῖται C : insidebit 𝔏 ‖ 16 ὥστε 𝔏 : ἔστω C ‖ κατὰ κάθετον 𝔏 : καθ' ἑαυτὸν C.

Imaginons, en effet, une grandeur, telle que nous venons de l'indiquer, abandonnée dans le liquide; imaginons aussi un plan mené par l'axe du segment (sc. sphérique) et par le centre de la terre dont l'intersection avec la surface du liquide soit l'arc ΑΒΓΔ et l'intersection avec la figure l'arc ΕΖΗ et la droite ΕΗ; soit ΖΘ l'axe du segment. Que ΖΘ ne soit pas, si possible, dans la direction de la verticale; il faut démontrer que la figure ne restera pas (sc. dans cette position), mais se dressera droite.

Le centre de la sphère est donc sur ΖΘ, car nous supposerons de nouveau la figure, en premier lieu, supérieure à l'hémisphère; soit Κ ce centre; menons la droite ΚΛ par Κ et par le centre de la terre Λ; dès lors, la figure découpée en dehors du liquide par la surface du liquide a son axe sur la droite (sc. verticale) passant par Κ, et pour les mêmes raisons que précédemment[1] son centre de gravité est situé sur ΝΚ; soit Ρ ce centre. Mais le centre de gravité du segment entier est situé sur ΖΘ entre les points Κ et Ζ; soit Τ ce centre. Il s'ensuit que le centre de gravité du reste du segment, dans le liquide, sera situé sur le prolongement de la droite ΤΡ, à l'extrémité d'un segment de droite dont le rapport à ΤΡ est égal au rapport de la partie du segment (sc. de sphère) située à l'extérieur du liquide au poids de la figure située dans le liquide[2]. Soit Ο le centre de cette dernière figure, et soit ΟΛ la verticale passant par Ο; le poids de la partie du

1. Cf. prop. 8.
2. Cf. *De l'équil. des fig. planes*, I, 8.

Νοείσθω γάρ τι μέγεθος, οἷον εἴρηται, εἰς τὸ ὑγρὸν ἀφετώμενον, νοείσθω δὲ καὶ ἐπίπεδον ἀγόμενον διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμάματος καὶ διὰ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς, τομὰ δὲ ἔστω τᾶς μὲν ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἁ ΑΒΓΔ περιφέρεια, τοῦ δὲ σχήματος ἁ ΕΖΗ περιφέρεια καὶ ἁ ΕΗ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ ΖΘ. Εἰ οὖν δυνατόν, μὴ κατὰ κάθετον ἔστω ἁ ΖΘ· δεικτέον οὖν ὅτι οὐ μενεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ ἐπ' ὀρθὸν καταστασεῖται.

Ἔστι δὴ τὸ κέντρον τᾶς σφαίρας ἐπὶ τᾶς ΖΘ· πάλιν γὰρ μεῖζον ἡμισφαιρίου ἔστω πρῶτον τὸ σχῆμα· καὶ ἔστω τὸ Κ· διὰ δὲ τοῦ Κ καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς τοῦ Λ ἄχθω ἁ ΚΛ· τὸ δὴ σχῆμα τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τὸν ἄξονα ἔχει ἐπὶ τᾶς διὰ τοῦ Κ, καὶ διὰ ταὐτὰ τοῖς πρότερον ἔστιν αὐτοῦ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΝΚ· ἔστω [γὰρ] τὸ Ρ. Τοῦ δὲ ὅλου τμάματος τὸ κέν⟨τρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΖΘ⟩ μεταξὺ τῶν Κ, Ζ· ἔστω τὸ Τ. Τοῦ ἄρα λοιποῦ σχήματος τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ κέντρον ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΤΡ εὐθείας ἐκβληθείσας καὶ ἀπολαφθείσας τινός, ἃ ἕξει ποτὶ τὰν ΤΡ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμάματος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ ποτὶ τὸ βάρος τοῦ σχήματος τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ· καὶ ἔστω τὸ Ο κέντρον τοῦ εἰρημένου σχήματος, καὶ διὰ τοῦ Ο κάθετος ἔστω ἁ ΟΛ· οἰσεῖται οὖν τὸ βάρος τοῦ μὲν τμάματος ὅ ἐστιν

2 ἀφετώμενον C : dimissa 𝔏 ‖ 3 τᾶς γᾶς 𝔏 : τοῦ $\overline{\gamma\lambda\alpha}$ ms. C ‖ 7 κάθετον 𝔏 : ὀρθὸν C ‖ δεικτέον 𝔏 : εἰ κται C ‖ 10 μεῖζον 𝔏 : om. C ‖ 12 ΚΛ ms. 𝔏 : κατά C ‖ δὴ Heiberg : om. C autem 𝔏 ‖ 14 καὶ add. Heiberg ‖ 15 τᾶς ΝΚ ms. 𝔏 : τασι $\overline{IB}$ ms. C ‖ 16 γὰρ codd. : del. Heiberg ‖ 16-17 κέντρον — ΖΘ rest. Heiberg : centrum grauitatis est in linea zt ms 𝔏 ‖ 19 ΤΡ ms. 𝔏 : Τ ms. C ‖ καὶ ἀπολαφθείσας 𝔏 : om. C ‖ 20 ἃ ἕξει ποτὶ 𝔏 : δείξει $\overset{\varepsilon}{\pi}$ ms. C ‖ τὰν Heiberg : τὸν C ‖ ὃν 𝔏 : om. C ‖ 21 βάρος pr. 𝔏 : μέρος C ‖ τοῦ sec. 𝔏 : om. C ‖ ὑγροῦ ποτὶ 𝔏 : ὑπὸ τὶ C ‖ 22 καὶ ἔστω Heiberg : κατὰ C sit autem 𝔏 ‖ 22-23 κέντρον τοῦ 𝔏 : κέντρου C ‖ 23 καὶ 𝔏 : om. C ‖ Ο ms. 𝔏 : om. C ‖ 23-24 ἁ ΟΛ Heiberg : τὸ Θ CΛ ms. C.

segment située à l'extérieur du liquide tendra donc vers le bas suivant la droite PΛ, et le poids de la figure située dans le liquide tendra vers le haut suivant la ligne OΛ[1]. Il s'ensuit que la figure ne restera pas en place, mais que les parties de la figure du côté du point H se déplaceront vers le bas, et les parties du côté de E vers le haut, et ce mouvement continuera jusqu'à ce que ΘZ soit orienté suivant la verticale[2].

1. Cf. prop. 7.
2. Archimède semble avoir omis de mentionner ici les deux cas où le corps flottant a la forme d'un hémisphère ou d'un segment sphérique inférieur à l'hémisphère ; cf. la fin de la prop. 8.

ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ, κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν ΡΛ ἐς τὸ κάτω, τοῦ δ' ἐν τῷ ὑγρῷ σχήματος κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν ΟΛ ἐς τὸ ἄνω. Οὐκ ἄρα μενεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τοῦ σχήματος τὰ μὲν ποτὶ τῷ Η μέρεα οἰσοῦνται ἐς τὸ κάτω, τὰ δὲ ποτὶ τῷ Ε ἐς τὸ ἄνω, καὶ ἀεὶ τοῦτο ἐσσεῖται, ἔστε κα ΘΖ κατὰ κάθετον γένηται.

1 τὰν εὐθεῖαν τὰν 𝔏 : τᾶς εὐθείας τᾶς C ‖ ΡΛ ms. C : r o′ ms. 𝔏 ‖ ἐς τὸ 𝔏 : ἔστω C ‖ 2 τὰν εὐθεῖαν τὰν 𝔏 : τᾶς εὐθείας τᾶς C ‖ ΟΛ ms. 𝔏 : ΕΛ ms. C ‖ 3 ἐς τὸ 𝔏 : ἔστω C ‖ 3-4 τοῦ σχήματος τὰ μὲν Heiberg : τὰ μ τοῦ σχάματος τὰ μὲν C partes quidem figurae quae 𝔏 ‖ 4 μέρεα Heiberg : μέρει C ‖ οἰσοῦνται Heiberg : οἰσοῦται C ‖ ἐς τὸ 𝔏 : ἔστω C ‖ 5 τῷ Heiberg : τὸ C ‖ ἐς 𝔏 : ἔσται C ‖ ἔστε κα 𝔏 : καὶ C ‖ ΘΖ Heiberg : ΕΖ ms. C, zt ms. 𝔏.

DES CORPS FLOTTANTS II

1.

Si une grandeur plus légère qu'un liquide (sc. de même volume) est abandonnée dans le liquide, le rapport de son poids au (sc. poids du même volume de) liquide sera égal au rapport entre la partie immergée de la grandeur et la grandeur entière.

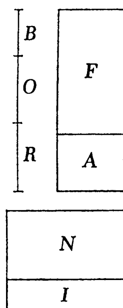


Fig. 94

Abandonnons en effet dans le liquide une grandeur solide ΦA plus légère que le liquide (sc. contenu dans le même volume) ; soit A sa partie immergée, Φ sa partie située en dehors du liquide. Il faut démontrer que le rapport entre le poids du solide ΦA et le poids du liquide de même volume est égal au rapport de A à ΦA (sc. Φ+A).

Donnons-nous une certaine grandeur NI de ce liquide, ayant le même volume que le solide ΦA ; que N soit équivalent à Φ, I équivalent à A ; soit B le poids de la grandeur ΦA, PO celui de NI, P celui de I ; le rapport de ΦA à NI est dès lors égal au rapport de B à PO. Mais du moment que la grandeur ΦA a

Β΄.

α΄.

Εἴ κά τι μέγεθος κουφότερον ἐὸν τοῦ ὑγροῦ ἀφεθῇ ἐς τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, ὃν ἔχει τὸ δεδυκὸς μέγεθος ποτὶ τὸ ὅλον μέγεθος.

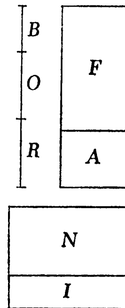


Fig. 94

Ἀφείσθω γάρ τι εἰς τὸ ὑγρὸν μέγεθος στερεὸν τὸ ΦΑ κουφότερον τοῦ ὑγροῦ ἐόν, ἔστω δὲ τὸ μὲν δεδυκὸς αὐτοῦ τὸ Α, τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τὸ Φ. Δεικτέον ὅτι τὸ ΦΑ τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν τὸ ἴσογκον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ Α ποτὶ τὸ ΦΑ.

Λελάφθω γάρ τι τοῦ ὑγροῦ μέγεθος τὸ ΝΙ ἴσον ὄγκον ἔχον τῷ ΦΑ, καὶ τῷ μὲν Φ ἴσον ἔστω τὸ Ν, τῷ δὲ Α τὸ Ι, καὶ ἔτι τὸ μὲν τοῦ ΦΑ μέγεθεος βάρος ἔστω τὸ Β, τοῦ δὲ ΝΙ τὸ ΡΟ, τοῦ δὲ Ι τὸ Ρ· τὸ ΦΑ ἄρα ποτὶ τὸ ΝΙ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ Β ποτὶ τὸ ΡΟ. Ἀλλ᾽ ἐπεὶ τὸ ΦΑ

7 ἐόν C : om. ℒ.

été abandonnée dans le liquide avec un poids moindre que celui du liquide (sc. de même volume), il est évident que le liquide ayant le volume de la partie immergée de cette grandeur a un poids égal à celui de la grandeur ΦA ; car cela a été démontré[1] ; il s'ensuit que le poids B est égal au poids P, puisque B est le poids de la grandeur entière ΦA, et P le poids du liquide I dont le volume a été pris égal au volume de la grandeur immergée A ; le poids de la grandeur ΦA est donc au poids de NI, comme le poids P est au poids PO. Or le poids P est au poids PO comme I est à IN et comme A est à ΦA ; la proposition est donc démontrée.

2.

Si un segment droit de paraboloïde de révolution[2], dont l'axe est inférieur ou égal aux trois demis du paramètre[3] et dont le poids peut avoir n'importe quel rapport avec celui (sc. d'un même volume) du liquide, est abandonné dans le liquide de manière que sa base ne touche pas le liquide, et qu'il y est placé incliné, il ne restera pas incliné, mais se redressera droit. Je qualifie de droite la position d'un tel segment, quand il est placé de manière que le plan qui le découpe (sc. du paraboloïde) est parallèle à la surface du liquide.

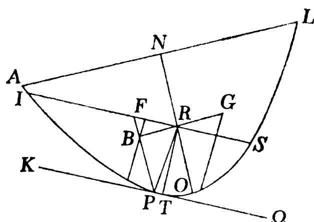


Fig. 95

1. Cf. prop. I, 5.
2. Cf. la *Notice* du traité *Sur les conoïdes et les sphéroïdes*.
3. Cf. notes compl.

μέγεθος ἐς τὸ ὑγρὸν ἀφείθη κουφότερον ὑπάρχον τοῦ ὑγροῦ, δῆλον ὡς ὁ τοῦ δεδυκότος μεγέθεος ὄγκος ἴσον βάρος ἔχει τῷ ΦΑ μεγέθει · δέδεικται γὰρ τοῦτο · ἴσον ἄρα τὸ Β βάρος τῷ Ρ, ἐπειδὴ τὸ μὲν Β τὸ βάρος ἐστὶ ὅλου τοῦ ΦΑ μεγέθεος, τὸ δὲ Ρ τοῦ Ι ὑγροῦ, ὃ τῷ μεγέθει ἐγένετο ἴσον τῷ ἴσον ὄγκον ἔχοντι τῷ δεδυκότι μεγέθει τῷ Α · ἔχει ἄρα τὸ ΦΑ μέγεθος τῷ βάρει ποτὶ τὸ ΝΙ ὡς τὸ Ρ ποτὶ τὸ ΡΟ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ Ρ ποτὶ τὸ ΡΟ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ Ι ποτὶ τὸ ΙΝ καὶ τὸ Α ποτὶ τὸ ΦΑ · δέδεικται ἄρα τὸ προτεθέν.

β′.

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν τὸν ἄξονα ἔχῃ μὴ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, πάντα λόγον ἔχον ποτὶ τὸ ὑγρὸν τῷ βάρει, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, τεθὲν κεκλιμένον οὐ μενεῖ κεκλιμένον, ἀλλὰ ἀποκαταστασεῖται ὀρθόν. Ὀρθὸν δὲ λέγω καθεστακέναι τὸ τοιοῦτο τμᾶμα, ὁπόταν τὸ ἀποτετμακὸς αὐτὸ ἐπίπεδον παρὰ τὰν ἐπιφάνειαν ᾖ τοῦ ὑγροῦ.

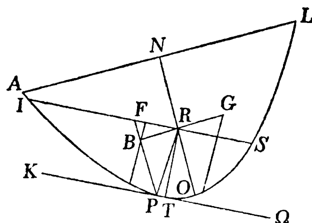


Fig. 95

1 ἀφείθη Heiberg : ἀφεθὲν C dimissa est ℒ ‖ 6 τῷ pr. Heiberg : τὸ C ‖ 7-8 τὸ ΝΙ ὡς τὸ Ρ ms. C : ni ita b ms. ℒ ‖ 9 τὸ Ι ποτὶ τὸ ΙΝ ms. C : ad r (inter duas lac.) ℒ ‖ 10 ἄρα Heiberg : om. C enim ℒ ‖ τὸ προτεθέν C : om. ℒ ‖ 13 μὴ C : om. ℒ ‖ 17 δὲ C : om. ℒ ‖ 19 ἐπίπεδον C : om. ℒ.

Soit un segment de paraboloïde de révolution tel que nous venons de l'indiquer. Qu'il soit placé dans une position inclinée. Il faut démontrer qu'il ne restera pas dans cette position, mais qu'il se redressera droit.

Coupons donc ce segment par un plan passant par l'axe et perpendiculaire au plan de la surface du liquide ; que l'intersection de ce plan avec le segment soit la parabole ΑΠΟΛ. Soit ΝΟ l'axe du segment et le diamètre de la (sc. parabole de) section, et ΙΣ l'intersection (sc. du plan sécant) avec la surface du liquide[1]. Puisque, dans ces conditions, le segment (sc. l'axe du segment) n'est pas vertical, la droite ΑΛ ne sera pas parallèle à la droite ΙΣ. Il s'ensuit que ΝΟ ne fait pas un angle droit avec ΙΣ. Menons donc à ΙΣ la parallèle ΚΩ, tangente à la section conique (sc. à la parabole d'intersection) au point Π, et du point Π menons la droite ΠΦ parallèlement à ΝΟ. La droite ΠΦ divise alors le. segment de droite ΙΣ en deux parties égales ; car cette propriété a été démontrée dans les recherches sur les coniques[2]. Divisons le segment de droite ΠΦ (sc. par un point Β) de manière que ΠΒ soit double de ΒΦ, et le segment de droite ΝΟ par le point Ρ de manière que ΟΡ soit à son tour double de ΡΝ. Dès lors, le centre de gravité du plus grand segment du solide sera le point Ρ, et celui du segment situé du côté de l'arc ΙΠΟΣ sera le point Β ; car il a été démontré dans le traité *Des Équilibres* que dans tout segment de paraboloïde de révolution le centre de gravité est situé sur l'axe au point qui le divise de manière que le segment de l'axe du côté du sommet soit double du segment restant. Si on retranche donc le segment solide suivant l'arc ΙΠΟΣ du segment entier, le centre de gravité de la figure qui reste sera situé sur la droite ΒΓ ; car il a été démontré dans les *Éléments de mécanique* que si d'une grandeur entière est retranchée une grandeur n'ayant pas le même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur qui reste sera situé sur la droite

1-2. Cf. notes compl.

Ἔστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, οἷον εἴρηται, καὶ κείσθω κεκλιμένον. Δεικτέον ὅτι οὐ μενεῖ, ἀλλ᾽ ἀποκαταστασεῖται ὀρθόν.

Τμαθέντος δὴ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ⟨ἐπίπεδον τὸ ἐπὶ τᾶς ἐπιφανείας⟩ τοῦ ὑγροῦ τμάματος ἔστω τομὰ ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἄξων δὲ τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΝΟ, τᾶς δὲ τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τομὰ ἁ ΙΣ. Ἐπεὶ οὖν τὸ τμᾶμα οὐκ ἐστὶν ὀρθόν, οὐκ ἂν εἴη παράλληλος ἁ ΑΛ τᾷ ΙΣ· ὥστε οὐ ποιήσει ὀρθὰν γωνίαν ἁ ΝΟ ποτὶ τὰν ΙΣ. Ἄχθω οὖν παράλληλος ἁ ἐφαπτομένα ἁ ΚΩ τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Π, καὶ ἀπὸ τοῦ Π παρὰ τὰν ΝΟ ἄχθω ἁ ΠΦ· τέμνει δὴ ἁ ΠΦ δίχα τὰν ΙΣ· δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς κωνικοῖς. Τετμάσθω ἁ ΠΦ, ὥστε εἶμεν διπλασίαν τὰν ΠΒ τᾶς ΒΦ, καὶ ἁ ΝΟ κατὰ τὸ Ρ τετμάσθω, ὥστε καὶ τὰν ΟΡ τᾶς ΡΝ διπλασίαν εἶμεν· ἐσσεῖται δὴ τοῦ μείζονος ἀποτμάματος τοῦ στερεοῦ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ρ, τοῦ δὲ κατὰ τὰν ΙΠΟΣ τὸ Β· δέδεικται γὰρ ἐν ταῖς Ἰσορροπίαις, ὅτι παντὸς ὀρθογωνίου κωνοειδέος τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος διῃρημένου οὕτως, ὥστε τὸ ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ ἄξονος τμᾶμα διπλάσιον εἶμεν τοῦ λοιποῦ. Ἀφαιρεθέντος δὴ τοῦ κατὰ τὰν ΙΠΟΣ τμάματος στερεοῦ ἀπὸ τοῦ ὅλου τοῦ λοιποῦ ⟨τὸ⟩ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΒΓ εὐθείας· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Στοιχείοις τῶν μηχα⟨νικῶν ὅτι, εἴ κα μέγεθος ἀφαιρεθῇ μὴ⟩ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχον τοῦ βάρεος τῷ ὅλῳ μεγέθει, τοῦ λοιποῦ τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ

5 ἐπίπεδον τὸ ἐπὶ τᾶς ἐπιφανείας rest. Heiberg : planum quod in superficie 𝔏 ‖ 6 ἁ 𝔏 : om. C ‖ 8 ΙΣ ms. C : k ms. 𝔏 ‖ 10 τᾷ 𝔏 : τῆς C ‖ ΝΟ ms. 𝔏 : ΝΘ ms. C ‖ 11 παράλληλος om. 𝔏 ‖ ἁ ἐφαπτομένα ἁ ΚΩ Heiberg : ἡ ἐφαπτομένη ΙΣΚΩ τῷ C quae kw contingens 𝔏 ‖ 16 τὰν om. C ‖ ΡΝ Heiberg : ΡΗ ms. C ‖ διπλασίαν Heiberg : διπλῆν C ‖ 19 κωνοειδέος Heiberg : κώνου εἰδοῦς C ‖ 20 διῃρημένου Heiberg : διῃρήσθω C ‖ 23 τὸ addidi.

joignant les centres de gravité de la grandeur entière et de la grandeur retranchée, cette droite étant prolongée du côté où se trouve le centre de gravité de la grandeur entière[1]. Prolongeons donc BP vers Γ, et soit Γ le centre de gravité de la grandeur qui reste. Du moment que NO est égal aux trois demis de OP et ne dépasse pas les trois demis du paramètre, il est évident que le segment de droite PO ne sera pas supérieur au paramètre. La droite ΠP fait donc avec la droite KΩ des angles inégaux, et l'angle PΠΩ est aigu, et par conséquent la perpendiculaire abaissée du point P sur la droite ΠΩ tombera entre les points Π et Ω. Qu'elle tombe suivant la droite PΘ ; PΘ est donc perpendiculaire au plan, parallèle[2] à KΩ, dans lequel se trouve la droite ΣI et qui est situé à la surface du liquide. Menons par les points B et Γ des parallèles à PΘ. La partie de la grandeur qui émerge du liquide se déplacera donc vers le bas suivant la verticale qui passe par le point Γ, puisque nous supposons que tous les corps pesants se déplacent vers le bas suivant la verticale passant par leur centre de gravité[3]. D'autre part, la grandeur immergée dans le liquide, du moment qu'elle est plus légère[4] que le liquide, se déplacera vers le haut suivant la verticale passant par B. Mais comme ces grandeurs ne se compriment pas l'une l'autre en des sens contraires suivant la même verticale, la figure ne restera pas en place, mais ses parties situées du côté de A iront vers le haut, alors que ses parties situées du côté de Λ iront vers le bas, et ceci continuera à se produire, jusqu'à ce que la figure se dresse droite.

3.

Si un segment droit de paraboloïde a son axe inférieur ou égal aux trois demis du paramètre, son poids pouvant

1. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.
2. Le texte présente ici une lacune d'un mot ou de deux mots ; Heiberg complète la phrase par le terme parallèle.
3-4. Cf. notes complémentaires.

τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ τε ὅλου μεγέθεος καὶ τοῦ ἀφῃρημένου ἐκβεβλημένας ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ἃ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθεός ἐστιν. Ἐκβεβλήσθω δὴ ἁ ΒΡ ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ἔστω τὸ Γ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ λοιποῦ μεγέθεος. Ἐπεὶ οὖν ἁ ΝΟ τᾶς μὲν ΟΡ ἡμιολία, τᾶς δὲ μέχρι τοῦ ἄξονος οὐ μείζων ἢ ἡμιολία, δῆλον ὅτι ἁ ΡΟ τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος οὐκ ἐστὶ μείζων· ἁ ΠΡ ἄρα ποτὶ τὰν ΚΩ γωνίας ἀνίσους ποιεῖ, καὶ ἁ ὑπὸ τῶν ΡΠΩ γίνεται ὀξεῖα· ἁ ἀπὸ τοῦ Ρ ἄρα κάθετος ἐπὶ τὰν ΠΩ ἀγομένα μεταξὺ πεσεῖται τῶν Π, Ω. Πιπτέτω ὡς ἁ ΡΘ· ἁ ΡΘ ἄρα ὀρθά ἐστιν ποτὶ τὸ.......κ..ος ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ ΣΙ, ὅ ἐστιν ἐπὶ τᾶς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Ἄχθωσαν δή τινες ἀπὸ τῶν Β, Γ παρὰ τὰν ΡΘ· ἐνεχθήσεται δὴ τὸ μὲν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τοῦ μεγέθεος εἰς τὸ κάτω κατὰ τὰν διὰ τοῦ Γ ἀγομέναν κάθετον· ὑπόκειται γὰρ ἕκαστον τῶν βαρέων εἰς τὸ κάτω φέρεσθαι κατὰ τὰν κάθετον τὰν διὰ τοῦ κέντρου ἀγομέναν· τὸ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ μέγεθος, ἐπεὶ κουφότερον γίνεται τοῦ ὑγροῦ, ἐνεχθήσεται εἰς τὸ ἄνω κατὰ τὰν κάθετον τὰν διὰ τοῦ Β ἀγομέναν. Ἐπεὶ δὲ οὐ κατὰ τὰν αὐτὰν κάθετον ἀλλάλοις ἀντιθλίβονται, ⟨οὐ μενεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὰ μὲν κατὰ⟩ τὸ Α εἰς τὸ ἄνω ἐνεχθήσεται, τὰ δὲ κατὰ τὸ Λ εἰς τὸ κάτω, καὶ τοῦτο ἀεὶ ἐσσεῖται, ἕως ἂν ὀρθὸν ἀποκατασταθῇ.

γ′.

Ὀρθὸν τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν τὸν ἄξονα ἔχῃ μὴ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, πάντα

2 ἐκβεβλημένας add. Heiberg ‖ 3 ἃ Heiberg : οὗ C ‖ 4 κέντρον om. C ‖ 6 μείζων ἢ Heiberg : μεῖζον εἰ C ‖ 9 ὀξεῖα Heiberg : ὀξεῖ C ‖ 12 ἐπὶ Heiberg : ἡ ἐπὶ C ‖ 18 ἐπεὶ Heiberg : ἐπὶ C ‖ 19-20 ἐπεὶ δὲ οὐ Heiberg : ἐπιπέδου C ‖ 20 ἀλλάλοις Heiberg : ἀλλὰ c̄ι λη. ω ms. C ‖ 21 οὐ — κατὰ rest. Heiberg ‖ 22 καὶ τοῦτο add. Heiberg ‖ 23 ἐσσεῖται Heiberg : ἔστε C ‖ 26 μὴ C : om. 𝔊 ‖ ἢ 𝔊 : om. C ‖ τοῦ ἄξονος 𝔊 : τοὺς ἄξονας C.

avoir n'importe quel rapport au poids du (sc. même volume du) liquide, et si, abandonné dans le liquide de manière que sa base soit entièrement dans le liquide, il y est placé en position inclinée, il ne restera pas incliné, mais prendra une position telle que son axe soit dans la verticale.

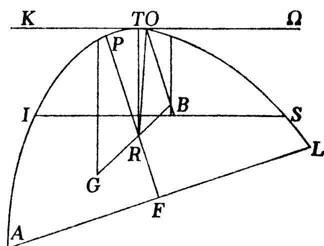


Fig. 96

Qu'un segment tel que nous venons de l'indiquer soit abandonné dans le liquide ; que sa base soit dans le liquide ; que son intersection avec un plan passant par l'axe et perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole[1] ΑΠΟΛ ; soit ΠΦ l'axe du segment et le diamètre de la parabole d'intersection, soit ΙΣ l'intersection (sc. du plan indiqué) avec la surface du liquide. Du moment donc que le segment occupe une position inclinée, son axe n'aura pas la direction de la verticale ; la droite ΠΦ ne fera donc pas des angles égaux avec la droite ΙΣ. Menons parallèlement à ΙΣ la droite ΚΩ tangente à la parabole au point Ο ; soit Ρ le centre de gravité du solide ΑΠΟΛ, Β celui du solide ΙΠΟΣ ; menons et prolongeons la droite ΒΡ, et soit Γ le centre de gravité[2] du solide ΙΣΛΑ. Comme plus haut[3] on démontrera que l'angle compris entre ΡΟ et ΟΚ est aigu et que la perpendiculaire abaissée du

1. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 11.
2. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.
3. Cf. prop. II, 3.

λόγον ἔχον ποτὶ τὸ ὑγρὸν τῷ βάρει, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, τεθὲν κεκλιμένον οὐ μενεῖ κεκλιμένον, ἀλλ᾽ ἀποκαταστασεῖται οὕτως, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ κατὰ κάθετον εἶμεν.

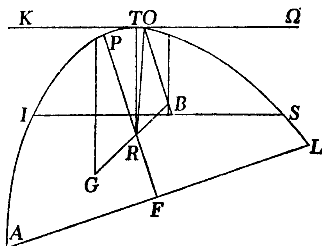


Fig. 96

Ἀφείσθω γάρ τι τμᾶμα εἰς τὸ ὑγρόν, οἷον εἴρηται, καὶ ἔστω αὐτοῦ ἁ βάσις ἐν τῷ ὑγρῷ, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ τομὰ ἔστω ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἄξων δὲ τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΠΦ, τᾶς δὲ ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ τομὰ ἁ ΙΣ. Ἐπειδὴ οὖν κεκλιμένον κεῖται τὸ τμᾶμα, οὐκ ἐσσεῖται κατὰ κάθετον ὁ ἄξων· οὐκ ἄρα ποιήσει ἁ ΠΦ ἴσας γωνίας ποτὶ τὰν ΙΣ. Ἄχθω δή τις ⟨ἁ ΚΩ παρὰ τὰν ΙΣ ἐφαπτομένα κατὰ⟩ τὸ Ο τᾶς ΑΠΟΛ τομᾶς, καὶ τοῦ μὲν ΑΠΟΛ στερεοῦ κέντρον ἔστω τοῦ βάρεος τὸ Ρ, τοῦ δὲ ΙΠΟΣ στερεοῦ τὸ Β, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ ΒΡ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ τοῦ ΙΣΛΑ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ἁ μὲν ὑπὸ τᾶν ΡΟ, ΟΚ γωνία ὀξεῖα, ἁ δὲ ἀπὸ τοῦ Ρ κάθετος

7 βάσις ℒ : βάσει C ‖ αὐτοῦ alt. C : om. ℒ ‖ 14 ἁ — κατὰ rest. Heiberg : quae kω aequedistanter ipsi is contigens ℒ ‖ 15 τοῦ μὲν ℒ : τομὴ C ‖ κέντρον ℒ : om. C ‖ 17 ἁ ℒ : δὴ C ‖ 19 γωνία ℒ : γωνίαν C.

point P sur KΩ tombera entre les points K et O ; soit PΘ cette perpendiculaire. Dès lors, si des points Γ et B on mène des parallèles à PΘ, la partie (sc. du segment) immergée dans le liquide se déplacera vers le haut[1] suivant la parallèle menée par Γ et la partie qui émerge du liquide ira vers le bas suivant la parallèle menée par B, et le solide ΑΠΟΛ ne gardera pas sa position dans le liquide, mais sa partie du côté de Α sera emportée vers le haut, sa partie du côté de Λ le sera vers le bas, et cela jusqu'à ce que ΠΦ soit dans la verticale.

4.

Si un segment droit de paraboloïde, plus léger que le liquide (sc. de même volume), a un axe supérieur aux trois demis du paramètre, si le rapport de son poids au poids du même volume du liquide n'est pas inférieur au rapport du carré sur la différence entre l'axe et les trois demis du paramètre au carré sur l'axe, ce segment, abandonné dans le liquide dans une position inclinée et de manière que sa base ne touche pas le liquide, ne restera pas incliné, mais se redressera droit.

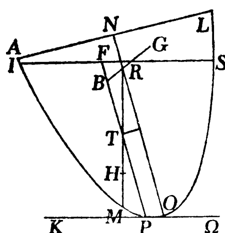


Fig. 97

1. Cf. prop. I, 7, fin.

ἐπὶ τὰν ΚΩ ἀγομένα μεταξὺ πίπτουσα τῶν Κ, Ο · ἔστω ἁ ΡΘ. Ἐὰν δὴ ἀπὸ τῶν Γ, Β ἀχθέωντί τινες παρὰ τὰν ΡΘ, τὸ μὲν ἐν τῷ ὑγρῷ ἀπολαφθὲν ἐνεχθήσεται ἄνω κατὰ τὰν διὰ τοῦ Γ ἀγομέναν, τὸ δ' ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ κατὰ τὰν διὰ τοῦ Β ἀγομέναν κάτω, καὶ οὐ μενεῖ τὸ ΑΠΟΛ στερεὸν οὕτως ἔχον ἐν τῷ ὑγρῷ, ἀλλὰ τὸ μὲν κατὰ τὸ Α ἄνω τὰν φορὰν ἕξει, τὸ δὲ κατὰ τὸ Λ κάτω, ἕως ἂν γένηται ἁ ΠΦ κατὰ κάθετον.

δʹ.

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὁπόταν κουφότερον ᾖ τοῦ ὑγροῦ καὶ τὸν ἄξονα ἔχῃ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ὅταν τῷ βάρει ποτὶ τὸ ἴσογκον ὑγρὸν μὴ ἐλάσ⟨σονα λόγον ἔχῃ τοῦ ὃν ἔχει⟩ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, τεθὲν κεκλιμένον οὐ μενεῖ κεκλιμένον, ἀλλὰ ἀποκαταστασεῖται εἰς ὀρθόν.

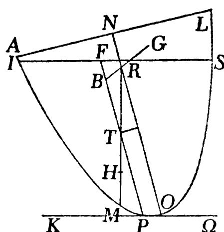


Fig. 97

1 O ms. $\mathscr{X}$: Ω ms. C ‖ 2 δὴ Heiberg : δὲ codd. ‖ 13 λόγον — ἔχει rest. Heiberg : proportionem habeat illa quam habet $\mathscr{X}$ ‖ 14 μείζων $\mathscr{X}$: μεῖζον C.

Soit un segment de paraboloïde tel que nous venons de l'indiquer ; que, mis dans le liquide, il occupe, si possible, une position non droite, mais inclinée ; que son intersection avec un plan passant par l'axe et perpendiculaire à la surface du liquide soit le segment de parabole[1] APOL ; soit NO l'axe du segment et le diamètre de la parabole, IS la trace du plan sécant dans la surface du liquide. Si donc le segment n'est pas en position droite, NO ne fera pas des angles égaux[2] avec IS. Menons la tangente KΩ à la parabole au point P parallèlement à IS, et menons par P la parallèle PF à ON ; prenons les centres de gravité, soit R pour le solide APOL, soit B pour la partie immergée dans le liquide, menons BR et prolongeons BR jusqu'au point G, qui soit le centre de gravité[3] (sc. de la partie) du solide émergeant du liquide. Comme NO est égal[3] aux trois demis de RO et supérieur aux trois demis du paramètre, il est évident que RO est supérieur au paramètre. Soit donc RM égal au paramètre, et OM double de HM. Du moment donc que NO est égal aux trois demis de RO, et HO égal aux trois demis de OM, le segment restant NH est à son tour égal[4] aux trois demis du segment restant RM ; il s'ensuit que l'axe dépasse les trois demis du paramètre[5], égal à RM, du segment de droite HO. Comme on a supposé que

1. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 11.
2. Cf. prop. II, 2.
3. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.
4. On a en effet : $NH = NO - HO = \frac{3}{2} PO - \frac{3}{2} OM = \frac{3}{2} (PO - OM) = \frac{3}{2} PM$.
5. On a : $NO = NH + HO = \frac{3}{2} PM + HO$.

Ἔστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, οἷον εἴρηται, καὶ ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, εἰ δυνατόν, ἔστω μὴ ὀρθόν, ἀλλὰ κεκλιμένον, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ τοῦ μὲν τμάματος τομὰ

sit rectanguli coni sectio quae APOL, axis autem portionis et diameter <sectionis> quae NO, superficiei autem humidi sectio sit IS. Si igitur portio non est recta, non faciet quae NO ad IS angulos aequales.

Ducatur autem quae KΩ contingens sectionem rectanguli coni penes P, aequedistans autem ipsi IS, a P autem aequedistanter ipsi ON ducatur quae PF, et accipiantur centra grauitatum, et erit solidi quidem APOL centrum R, eius autem, quod intra humidum, centrum B, et copuletur quae BR et educatur ad G, et sit solidi, quod supra humidum, centrum grauitatis G. Et quoniam quae NO ipsius quidem RO est emiolia, eius autem, quae usque ad axem, est maior quam emiolia, palam quod quae RO est maior quam quae usque ad axem. Sit igitur quae RM aequalis ei, quae usque ad axem, quae autem OM dupla ipsius HM. Quoniam igitur fit quae quidem NO ipsius RO emiolia, quae autem HO ipsius OM, et reliqua quae NH reliquae, scilicet RM, emiolia est ; ipsi HO igitur maior quam emiolius est axis eius, quae usque ad axem, scilicet RM. Et quoniam supponebatur portio ad humidum in

1 τμᾶμα ὀρθογωνίου C : portio rectangula 𝓛 || 7 sectionis Comm. : om. 𝓛 || 16 BR Comm. : tr ms. 𝓛 || 23 OM Heiberg : on ms. 𝓛 || HM Comm. : rm ms. 𝓛 || 24 HO Heiberg : mo ms. 𝓛 || 25 OM Heiberg : oh ms. 𝓛 || NH Heiberg : nm ms. 𝓛 || RM Heiberg : rh ms. 𝓛 || 26 HO Heiberg : mo ms. 𝓛 || igitur Heiberg : est ms. 𝓛.

le rapport entre le poids du segment de paraboloïde et le poids (sc. du même volume) du liquide n'est pas inférieur au rapport du carré sur la différence entre l'axe et les trois demis du paramètre, d'une part, et le carré sur l'axe, d'autre part, il est évident que le rapport du poids du segment au poids du (sc. même volume) du liquide n'est pas inférieur au rapport du carré sur HO au carré sur NO. Or le rapport du poids du segment au poids du liquide est égal au rapport de la partie immergée du segment au segment solide entier, comme cela a été démontré[1] ; mais le rapport de la partie immergée au solide entier est égal au rapport du carré sur PF au carré sur NO ; car on a démontré dans le Traité des conoïdes que si d'un paraboloïde de révolution deux segments sont découpés par des plans menés de n'importe quelle manière, les segments ont entre eux le même rapport que les carrés sur leurs axes[2]. Par conséquent, le rapport du carré sur PF au carré sur NO ne sera pas inférieur au rapport du carré sur HO au carré sur NO ; il s'ensuit que PF n'est pas inférieur[3] à HO, ni BP inférieur[4] à MO ; si donc on mène de M la perpendiculaire à NO, elle tombera entre B et P. Puisque, par conséquent, PF est parallèle au diamètre, MT perpendiculaire au diamètre, et RM égal au paramètre, le prolongement de la droite joignant R à T fera des angles droits avec la tangente au point P ; elle fera donc aussi des angles égaux[5] avec IS et avec la surface du liquide passant

1. Cf. prop. II, 1.
2. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 24.
3. Cf. Eucl. V, 7 et 8.
4. Cf. prop. II, 2.
5. Cf. Eucl. I, 29 ; IS est en effet parallèle à KΩ.

grauitate non minorem proportionem habens illa, quam habet tetragonum, quod ab excessu, quo axis est maior quam emiolius eius, quae usque ad axem, ad tetragonum quod ab axe, palam quod non minorem proportionem habet portio ad humidum in grauitate illa proportione, quam habet tetragonum quod ab HO ad id quod ab NO, quam autem proportionem habet portio ad humidum in grauitate, hanc habet demersa ipsius portio ad totam solidam portionem ; demonstratum est enim hoc ; sed quam habet proportionem demersa portio ad totam, hanc habet tetragonum quod a PF ad tetragonum quod ab NO ; demonstratum est enim in his, quae de conoidalibus, quod, si a rectangulo conoidali duae portiones qualitercumque productis planis abscindantur, portiones adinuicem eandem habebunt proportionem quam tetragona quae ab axibus ipsorum. Non minorem ergo proportionem habet tetragonum quod a PF ad tetragonum quod ab NO quam tetragonum quod ab HO ad tetragonum quod ab NO ; quare quae PF non est minor quam HO, neque quae BP quam MO ; si igitur ab M ipsi NO recta ducatur, cadet inter B et P. Quoniam igitur quae quidem PF est aequidistanter diametro, quae autem MT est perpendicularis ad diametrum, et quae RM aequalis ei quae usque ad axem, ab R ad T copulata et educta faciet angulos rectos ad contingentem secundum P ; quare et ad IS et ad eam quae per IS superficiem humidi faciet aequales

7 HO Heiberg : mo ms. 𝓛 || 12 a PF ad tetragonum quod rest. Comm. : lac. 𝓛 || 20 HOHeiberg : mo ms. 𝓛 || 21 HO Heiberg : mo ms. 𝓛 || 22 MO Heiberg : no ms. 𝓛 || 25 MT Heiberg : nt ms. 𝓛.

par IS. Mais si par B et G on mène des parallèles à RT, elles feront des angles droits avec la surface du liquide, et ainsi la partie du segment solide du paraboloïde, immergée dans le liquide, se déplacera vers le haut suivant la parallèle à RT menée par B, alors que la partie découpée en dehors du liquide ira vers le bas, dans le liquide suivant la parallèle à RT menée par G, et cela continuera à se produire jusqu'à ce que le (sc. segment de) paraboloïde ait pris la position droite.

5.

Si un segment droit de paraboloïde de révolution, plus léger que le liquide (sc. de même volume), a un axe supérieur aux trois demis du paramètre, et si le rapport de son poids au poids du même volume du liquide n'est pas supérieur au rapport de l'excès du carré de l'axe sur le carré de la différence entre l'axe et les trois demis du paramètre au carré de l'axe[1], ce segment, abandonné dans le liquide, de manière que sa base soit entièrement dans le liquide, et placé dans une position inclinée, ne restera pas dans cette position, mais se redressera de manière que son axe soit dans la verticale.

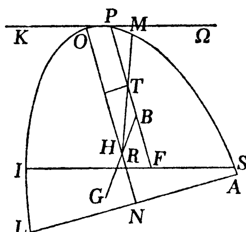


Fig. 98

1. En désignant le paramètre par p, ces conditions, différentes de celles de la proposition précédente, s'écrivent :

$$\mathrm{NO} > \frac{3\,\mathrm{p}}{2}\,;\quad \frac{\text{poids du segment}}{\text{poids du même vol. de liqu.}} \leqslant \frac{\overline{\mathrm{NO}}^2 - (\mathrm{NO} - \frac{3\,\mathrm{p}}{2})^2}{\overline{\mathrm{NO}}^2}.$$

angulos. Si autem per B, G ipsi RT aequedistantes ducantur, anguli recti erunt facti ad superficiem humidi, et quod quidem in humido absumitur solidum conoidalis, sursum feretur secundum eam quae per B aequedistantem ipsi RT, quod autem extra humidum absumptum deorsum feretur in humidum secundum productam per G aequedistantem ipsi RT, et per totum idem erit, donec utique conoidale rectum restituatur.

V.

Recta portio rectanguli conoidalis, quando leuior existens humido habuerit axem maiorem quam emiolium eius quae usque ad axem, si ad humidum in grauitate non maiorem proportionem habeat illa, quam habet excessus, quo maius est tetragonum quod ab axe tetragono quod ab excessu, quo axis est maior quam emiolius eius quae usque ad axem, ad tetragonum quod ab axe, dimissa in humidum ita, ut basis ipsius tota sit in humido, posita inclinata non manet inclinata, sed restituetur ita, ut axis ipsius secundum perpendicularem sit.

Fig. 98

Abandonnons, en effet, dans le liquide un segment tel que nous venons de l'indiquer, sa base entièrement dans le liquide ; son intersection avec un plan passant par l'axe et perpendiculaire à la surface du liquide sera une parabole, soit APOL ; soit NO l'axe du segment et le diamètre de la parabole d'intersection, et IS la trace du plan sécant dans la surface du liquide. Comme l'axe n'est pas dans la verticale, NO ne fera pas des angles égaux avec IS. Menons la droite KΩ, tangente à la parabole APOL au point P et parallèle à IS, et menons par P la parallèle PF à NO ; prenons les centres de gravité, soit R le centre de la parabole APOL, B le centre de la partie qui émerge du liquide ; menons la droite BR et prolongeons-la jusqu'au point G ; soit G le centre de gravité de la partie du solide immergée dans le liquide[1] ; prenons RM égal au paramètre et OM double de HM, et disposons du reste comme précédemment[2]. Du moment donc que, par hypothèse, le rapport du poids du segment au poids du liquide (sc. de même volume) n'est pas supérieur au rapport de l'excès du carré de NO sur le carré de HO au carré sur NO, et que, d'autre part, le rapport du poids du segment au poids du même volume du liquide est égal au rapport de la partie immergée du segment au solide entier (comme cela a été démontré dans le premier théorème), le rapport de la grandeur immergée au segment entier n'est pas supérieur au rapport indiqué ; il s'ensuit que le rapport du segment entier à sa partie émergeant du liquide n'est pas supérieur[3] au rapport du carré

1. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.
2. Cf. prop. II, 4.
3. On a en effet : $\frac{\text{segm. immergé}}{\text{segm. entier}} = \frac{\text{poids du segm.}}{\text{poids du même v. du liqu.}} \leqslant \frac{\overline{NO}^2 - \overline{HO}^2}{\overline{NO}^2}$; d'où $\frac{\text{segm. entier}}{\text{segm. immergé}} \geqslant \frac{\overline{NO}^2}{\overline{NO}^2 - \overline{HO}^2}$; d'où

$$\frac{\text{segm. entier}}{\text{segm. entier} - \text{segm. imm.}} = \frac{\text{segm. entier}}{\text{segm. émergé}} \leqslant \frac{\overline{NO}^2}{\overline{NO}^2 - (\overline{NO}^2 - \overline{HO}^2)} = \frac{\overline{NO}^2}{\overline{HO}^2}.$$

Dimittatur enim in humidum aliqua portio, qualis dicta est, et sit basis ipsius tota in humido, secta autem ipsa plano per axem recto ad superficiem humidi erit sectio rectanguli coni sectio, et sit quae APOL, axis autem <portionis> et diameter sectionis quae NO, superficiei autem humidi sectio quae IS. Et quoniam non est axis secundum perpendicularem, non faciet quae NO ad IS angulos aequales. Ducatur autem quae KΩ contingens sectionem APOL secundum P aequedistans ipsi IS et per P ipsi NO aequedistans quae PF, et accipiantur centra grauitatum, et sit ipsius quidem APOL centrum R, eius autem quod extra humidum B, et copulata quae BR educatur ad G, et sit G centrum grauitatis solidi absumpti in humido, et accipiatur quae RM aequalis ei quae usque ad axem, quae autem OM dupla ipsius HM, et alia fiant consimiliter superiori. Quoniam igitur supponitur portio ad humidum in grauitate non maiorem proportionem habens proportione, quam habet excessus, quo maius est tetragonum quod ab NO tetragono quod ab HO, ad tetragonum quod ab NO, sed quam proportionem habet in grauitate portio ad humidum aequalis molis, hanc proportionem habet demersa ipsius portio ad totum solidum (demonstratum est enim hoc in primo theoremate), non maiorem ergo proportionem habet demersa magnitudo portionis ad totam portionem, quam sit dicta proportio ; quare non maiorem proportionem habet tota portio ad eam quae extra humidum portionem, quam habet tetragonum quod ab NO

5 portionis add. Comm. || 16 OM Heiberg : oh ms. 𝔛 || 21 HO Heiberg : mo ms. 𝔛 || 30 portione m Heiberg : proportionem 𝔛.

sur NO au carré sur HO. Or le rapport du segment entier à la partie émergeant du liquide est égal[1] au rapport du carré sur NO au carré sur PF ; le rapport du carré sur NO au carré sur PF n'est donc pas supérieur au rapport du carré sur NO au carré sur HO. Par conséquent, PF n'est pas inférieur à OH ; il s'ensuit que PB non plus n'est pas inférieur[2] à MO. Dès lors, la perpendiculaire abaissée de M sur RO rencontrera BP entre les points P et B ; soit T le point de rencontre. Et comme, dans la parabole, PF est parallèle au diamètre RO, MT perpendiculaire au diamètre, et RM égal au paramètre, il est évident que le prolongement de la droite RT fait des angles droits avec la droite KPΩ ; il fait donc des angles droits aussi avec la droite IS. Par conséquent, RT est perpendiculaire à la surface du liquide, et, de même, les parallèles à RT menées par les points B et G seront perpendiculaires à la surface du liquide ; il s'ensuit que la partie du segment qui émerge du liquide se déplacera vers le bas, dans le liquide, suivant la verticale passant par B, alors que la partie immergée ira vers le haut suivant la verticale passant par G, et le segment solide APOL ne restera pas immobile, mais sera mu dans le liquide, jusqu'à ce que la droite NO soit placée suivant la verticale.

6.

Si un segment droit de paraboloïde, plus léger que le liquide (sc. de même volume), a un axe supérieur aux trois demis du paramètre, mais trop petit pour

1. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 24.
2. Puisque BP $= \frac{2}{3}$ PF, et MO $= \frac{2}{3}$ HO.

ad tetragonum quod ab HO. Habet autem tota portio ad portionem quae extra humidum eandem proportionem, quam habet tetragonum quod ab NO ad id quod a PF ; non maiorem ergo proportionem habet quod ab NO ad id quod a PF, quam quod ab NO ad id quod ab HO. Non minor ergo fit quae PF quam quae OH ; quare nec quae PB quam MO. Quae ergo ab M producitur ipsi RO ad rectos angulos, concidet ipsi BP inter P et B ; concidat secundum T. Et quoniam in rectanguli coni sectione quae PF est aequedistanter diametro RO, quae autem MT perpendicularis super diametrum, quae autem RM aequalis ei quae usque ad axem, palam quod quae RT educta facit angulos rectos ad KPΩ ; quare et ad IS. Quae ergo RT est perpendicularis ad superficiem humidi, et per signa B, G aequedistanter ipsi RT productae erunt perpendiculares ad superficiem humidi ; quae quidem igitur extra humidum portio deorsum feretur in humidum secundum productam per B perpendicularem, quae autem intra humidum sursum feretur secundum perpendicularem quae per G, et non manet solida portio APOL, sed intra humidum erit motum, donec utique quae NO fiat secundum perpendicularem.

VI.

Recta portio rectanguli conoidalis, quando humido leuior existens axem habuerit maiorem quidem quam hemiolium, minorem autem quam ut hanc

1 HO Heiberg : mt ms. 𝔛 || 6 HO Heiberg : mo ms. 𝔛 || 7 OH add. Heiberg || MO Heiberg : n o ms. 𝔛 || 8 ad rectos angulos Comm. : equedistans 𝔛 || 23 motum rest. Comm. || 28 quam Tart. : om. 𝔛.

que son rapport au paramètre soit égal au rapport de quinze à quatre, ce segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base touche le liquide, ne restera jamais incliné de manière que sa base touche le liquide en un seul point.

Fig. 99

Soit un segment tel que nous venons de l'indiquer ; que, abandonné dans le liquide, il prenne la position désignée ci-dessus, c'est à dire telle que sa base touche le liquide en un seul point ; que son intersection avec un plan passant par l'axe et perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole[1] APOL ; soit AS la trace de ce plan dans la surface du liquide, et NO l'axe du segment et le diamètre de la parabole ; que NO soit divisé, par le point F de manière que OF soit double de FN, par le point Ω de manière que NO soit à FΩ comme quinze est à quatre ; élevons en Ω la perpendiculaire ΩK à NO. Le rapport de NO à FΩ est ainsi supérieur au rapport de NO au paramètre. Soit FB égal à l'axe ; menons parallèlement à AS la droite PC, tangente à la parabole APOL au point P, et la droite PI

1. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 16.

habeat proportionem ad eam quae usque ad axem, quam habent quindecim ad quattuor, dimissa in humidum ita, ut basis ipsius contingat humidum, numquam stabit inclinata ita, ut basis ipsius secundum unum signum contingat humidum.

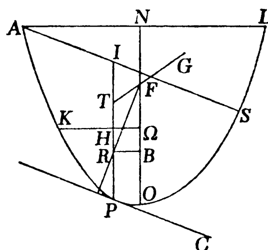


Fig. 99

Sit portio, qualis dicta est, et dimissa in humidum consistat, sicut ostensum est, ita ut basis ipsius secundum unum signum contingat humidum, secta autem ipsa per axem plano recto ad superficiem humidi sectio superficiei portionis sit quae APOL rectanguli coni sectio, superficiei autem humidi quae AS, axis autem portionis et diameter <sectionis> sit quae NO, et secetur secundum F quidem ita, ut quae OF sit dupla ipsius FN, secundum Ω autem ita, ut quae NO ad FΩ habeat proportionem, quam quindecim ad quattuor, et ipsi NO adducatur quae ΩK. Quae autem NO maiorem proportionem habet ad FΩ quam ad eam quae usque ad axem. Sit quae FB aequalis ei quae usque ad axem, et ducatur quae quidem PC aequedistanter ipsi AS contingens sectionem APOL secundum P, quae autem PI aeque-

12 sectionis add. Comm.

parallèle à NO. Que PI coupe, d'abord, KΩ. Du moment donc que, dans le segment APOL compris entre une droite et une parabole, KH est parallèle à AL, la parallèle au diamètre PI coupée par KΩ, et AS parallèle à la tangente en P, nécessairement le rapport de PI à PH est supérieur ou égal au rapport de NΩ à ΩO, comme cela a été démontré dans les lemmes[1]. Or ΩN est égal[2] aux trois demis de ΩO ; il s'ensuit que IP est supérieur ou égal aux trois demis de HP ; PH est donc inférieur ou égal[3] au double de HI. Soit PT double de TI ; le point T est donc le centre de gravité[4] de la partie immergée dans le liquide. Joignons T à F et prolongeons la droite TF ; soit G le centre de gravité[5] de la partie qui émerge du liquide ; élevons en B la perpendiculaire BR à NO. Du moment, dès lors, que PI est parallèle au diamètre NO, BR perpendiculaire au diamètre, et FB égal au paramètre, il est évident que le prolongement de FR fait des angles égaux avec la tangente à la parabole APOL au point P ; il fait donc des angles égaux aussi avec AS et avec la surface de l'eau. Mais les parallèles à FR menées par les points T et G seront elles aussi perpendiculaires à la surface de l'eau, et la grandeur découpée du solide APOL dans le liquide ira vers le haut suivant la perpendiculaire passant par T, alors que la grandeur qui émerge du liquide descendra dans le liquide suivant la perpendiculaire passant par G. Le solide APOL tournera donc, et

1. Probablement un recueil de lemmes, perdu aujourd'hui, qui faisait suite au traité *Des corps flottants*. La démonstration de la relation $\frac{PI}{PH} \geqslant \frac{N\Omega}{\Omega O}$ a été reconstituée une première fois par Commandin, suivi, entre autres, par Nizze et Ver Eecke ; cf. *Introduction*, t. I.

2. Cf. notes complémentaires.

3. Puisque $\frac{PI}{PH} \geqslant \frac{N\Omega}{O\Omega} = \frac{3}{2}$, on a $HI = PI - PH \geqslant \frac{1}{2} PH$, d'où : $PH \leqslant 2HI$.

4. Cf. prop. II, 2.

5. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I,8.

distanter ipsi NO ; secet autem quae PI prius ipsam KΩ. Quoniam igitur in portione APOL contenta a recta et a sectione rectanguli coni quae quidem KH aequedistanter ipsi AL, quae autem PI aequedistanter diametro secta ipsa KΩ, quae autem AS aequedistanter contingenti secundum P, necessarium est ipsam PI aut eandem proportionem habere ad PH, quam habet quae NΩ ad ΩO, aut maiorem proportionem ; demonstratum est enim hoc per sumpta. Quae autem ΩN est emiolia ipsius ΩO ; et quae IP ergo aut emiolia est ipsius HP aut maior quam emiolia ; quae ergo PH ipsius HI aut dupla est aut minor quam dupla. Sit autem quae PT ipsius TI dupla ; centrum ergo grauitatis eius quod in humido est signum T. Et copulata quae TF educatur, et sit centrum grauitatis eius quod extra humidum G, et a B ipsi NO recta quae BR. Quoniam igitur est quae quidem PI aequedistanter diametro NO, quae autem BR perpendicularis super diametrum, quae autem FB aequalis ei quae usque ad axem, palam quod quae FR educta aequales facit angulos ad contingentem sectionem APOL secundum P ; quare et ad AS et ad superficiem aquae. Ductis autem per T, G aequedistanter ipsi FR erunt et ipsae perpendiculares ad superficiem aquae, et magnitudo quidem intra humidum absumpta ex solido APOL sursum feretur secundum eam quae per T perpendicularem, quae autem extra humidum deorsum feretur in humidum secundum eam quae per G perpendicularem. Reuoluetur ergo solidum APOL,

8 aut add. Heiberg : uel Comm. ‖ 10 ΩN Comm. : ω h ms. 𝔏 ‖ IP Heiberg : ih ms. 𝔏 ‖ 21 FR Heiberg : τr ms. 𝔏 ‖ 30 reuoluetur Heiberg : ἀνακλιθήσεται 𝔏.

sa base ne touchera pas la surface du liquide en un point.

Fig. 100

Mais si PI ne coupe pas la droite KΩ comme le montre la seconde figure, il est clair que le point T, centre de gravité de la partie immergée du segment, tombera entre les points P et I, et le reste de la démonstration se fera de la même manière.

7.

Si un segment droit de paraboloïde, plus léger que le liquide (sc. de même volume), a un axe supérieur aux trois demis du paramètre, mais trop petit pour que son rapport au paramètre soit égal au rapport de quinze à quatre, ce segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base soit entièrement dans le liquide,

et basis ipsius non tanget superficiem humidi secundum unum signum.

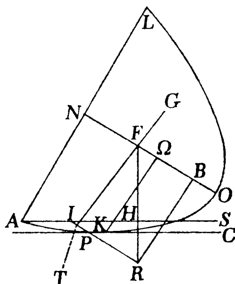


Fig. 100

Si autem quae PI non secuerit lineam KΩ, sicut in secunda figura descriptum est, manifestum quod signum T, quod est centrum grauitatis demersae portionis, cadet inter P et I, et reliqua similiter demonstrabuntur.

ζ′.

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν τοῦ ὑγροῦ κουφότερον ᾖ καὶ τὸν ἄξονα ἔχῃ μείζονα μὲν ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ἐλάσσονα δὲ ἢ ὥστε λόγον ἔχειν ποτὶ τὰν μέχρι τοῦ ἄξονος, ὃν τὰ ι̅ε̅ ποτὶ δ̅, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως ὥστε τὰν βάσιν ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, οὐδέποτε καταστασεῖται οὕτως, ὥστε τὰν

4 secunda Comm. : solida 𝔚 ‖ 10 τοῦ ὑγροῦ 𝔚 : τὸ ὑγρὸν C ‖ 11 μὲν 𝔚 : ἦν C ‖ ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος om. C ‖ ἢ om. 𝔚 ‖ 12 ὃν 𝔚 : ἢ ἡμιόλιον τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος ὃν C ‖ ι̅ε̅ 𝔚 : ρ̅ε̅ C ‖ 13 δ̅ 𝔚 : δ̅α̅ C ‖ βάσιν C : basis ipsius 𝔚.

ne prendra jamais une position telle que sa base touche la surface du liquide, mais telle qu'il soit entièrement dans le liquide et n'en touche la surface en aucun point.

Fig. 101

Soit un segment tel qu'il vient d'être indiqué ; que, abandonné dans le liquide comme il a été dit, il prenne une position telle que sa base touche la surface du liquide. Il faut démontrer qu'il ne restera pas ainsi, mais tournera de façon que sa base ne touche en aucun point la surface du liquide.

Que son intersection avec un plan (sc. passant par son axe et)[1] perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole[2] ΑΠΟΛ ; soit ΣΛ la trace du plan sécant dans la surface du liquide, et ΠΦ l'axe du segment et le diamètre (sc. de la parabole) ; divisions ΠΦ par le point P de manière que PΠ soit double de PΦ, et par le point Ω de manière que ΠΦ soit à PΩ comme quinze est à quatre, et menons la perpendiculaire ΩK à ΠΦ ; PΩ sera ainsi inférieur au paramètre[3]. Découpons (sur ΠΦ) le segment PH égal au paramètre, et menons parallèlement à ΣΛ la droite TO, tangente à la parabole au point O, et la droite NO parallèlement

1. Ces mots manquent dans le texte.
2. Cf. *Sur les con. et les sphér.* 11.
3. Cf. prop. 6.

βάσιν αὐτοῦ ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, ἀλλ' ὥστε ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ μηδὲ καθ' ἓν σαμεῖον ἁπτομέναν τᾶς ἐπιφανείας.

Fig. 101

Ἔστω τμᾶμα οἷον εἴρηται, καὶ ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν καθάπερ ἐρρέθη καθεστακέτω οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας. Δεικτέον ὅτι οὐ μενεῖ, ἀλλὰ ἀνακλιθήσεται οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας. Τμαθέντος γὰρ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν τομὰ ἔστω ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἔστω δὲ καὶ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τομὰ ἁ ΣΛ, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος ἁ ΠΦ, πάλιν δὲ τεμνέσθω ἁ ΠΦ κατὰ μὲν τὸ Ρ, ὥστε διπλασίαν εἶμεν τὰν ΡΠ τᾶς ΡΦ, κατὰ δὲ τὸ Ω, ὥστε τὰν ΠΦ ποτὶ τὰν ΡΩ λόγον ἔχειν ὃν τὰ $\overline{\iota\epsilon}$ ποτὶ τὰ $\overline{\delta}$, καὶ ἁ ΩΚ ὀρθὰ ἄχθω τᾷ ΠΦ· ἐσσεῖται δὴ ἐλάσσων ἁ ΡΩ τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. Ἀπολελάφθω οὖν τᾷ μέχρι τοῦ ἄξονος ἴσα ἁ ΡΗ, καὶ ἁ μὲν ΤΟ ἄχθω ἐφαπτομένα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Ο παράλληλος ἐοῦσα τᾷ ΣΛ, ἁ δὲ ΝΟ τᾷ ΠΦ, τεμνέτω δὲ ἁ ΝΟ

1 ἀλλ' — 3 ἐπιφανείας om. C : sed ut tota sit in humido nec secundum unum signum tangens superficiem ℒ || 11 ΣΛ Comm. : ΣΑ ℒ C || 12 ΠΦ ms. C : ρω ℒ || 19 ἁ δὲ ΝΟ ms. C : et quae no et aequedistans ℒ.

à ΠΦ ; que NO coupe, d'abord, KΩ au point I. On montrera comme précédemment[1] que NO est supérieur ou égal à OI ; dès lors OI sera inférieur[2] au double de IN. Soit donc OB double de BN, et prenons les mêmes

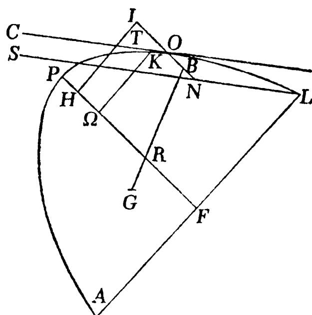


Fig. 102

dispositions ; on montrera ainsi de la même manière que PΘ fait des angles droits avec TO et avec la surface du liquide, et que des droites menées par B et Γ parallèlement à PΘ seront perpendiculaires à la surface du liquide. La partie du segment émergeant du liquide descendra donc dans le liquide suivant la verticale passant par B, et la partie immergée montera suivant la verticale passant par Γ ; il est dès lors évident que le solide tournera de façon que sa base ne touche en aucun point la surface du liquide, puisque, s'il la touche comme maintenant, il descend au fond du côté du point Λ.

Il est évident qu'on démontrera la même proposition aussi dans le cas où ON ne coupe pas ΩK.

1. Cf. prop. 6.

2. OI pouvant aussi être égal à 2IN, il y a peut-être une lacune dans le texte ; cf. plus haut, pour les mots « passant par son axe ».

τὰν ΚΩ πρότερον κατὰ τὸ Ι. Ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται ὅτι ἁ ΝΟ ἤτοι ἡμιολία τᾶς ΟΙ ἢ μείζων ἢ ἡμιολία· γίνεται δὴ ἁ ΟΙ τᾶς ΙΝ ἐλάσσων ἢ διπλασία. Ἔστω δὴ ἁ ΟΒ διπλασία τᾶς ΒΝ, καὶ κατεσκευάσθω τὰ

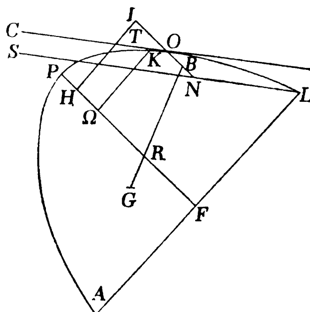


Fig. 102

αὐτά· ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ἁ ΡΘ ὀρθὰς γωνίας ποιοῦσα ποτὶ τὰν ΤΟ καὶ ποτὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν, καὶ ἀπὸ τῶν Β, Γ ἀχθεῖσαι παρὰ τὰν ΡΘ κάθετοι ἐσσοῦνται ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν. Κατενεχθήσεται οὖν τὸ μὲν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμᾶμα εἰς τὸ ὑγρὸν κατὰ τὰν διὰ τοῦ Β κάθετον, τὸ δ' ἐν τῷ ὑγρῷ ἀνενεχθήσεται κατὰ τὰν διὰ τοῦ Γ· φανερὸν οὖν ὅτι ἐπικλιθήσεται τὸ στερεόν, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, ἐπειδὴ νῦν καθ' ἓν σαμεῖον ⟨ἁπτόμενον ἐπὶ τὸ κάτω φέρε⟩ται ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Λ.

Φανερὸν δὲ ὅτι, κἂν ἁ ΟΝ μὴ τέμνῃ τὰν ΩΚ, ταὐτὰ δειχθήσεται.

2 μείζων 𝒢 : μεῖζον C ‖ ἢ om. C ‖ 4 Ἔστω δὴ ἁ ΟΒ διπλασία om. C : sit igitur quae ob dupla 𝒢 ‖ 5 ΡΘ ms. C : rf 𝒢 ‖ 7 ἀχθεῖσαι 𝒢 : ἀχθεῖσαν C ‖ 10-11 διὰ τοῦ om. C ‖ 13 σαμεῖον om. 𝒢 ‖ 13-14 ἁπτόμενον ἐπὶ τὸ κάτω φέρεται Heiberg : tangens ad deorsum fertur 𝒢 ‖ 14 Λ Comm. : Α mss. 𝒢C ‖ 15 ταὐτὰ 𝒢 : ταῦτα C.

8.

Si un segment droit de paraboloïde a un axe supérieur aux trois demis du paramètre, mais trop petit pour que son rapport au paramètre soit égal au rapport de quinze à quatre, et si le rapport de son poids à celui du liquide (sc. de même volume) est inférieur au rapport entre le carré de l'excès de l'axe sur les trois demis du paramètre, d'une part, et le carré de l'axe, d'autre part, ce segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base ne touche pas le liquide, ne se redressera pas droit et ne restera pas incliné, à moins que son axe ne fasse avec la surface du liquide un angle égal à celui que nous aurons à indiquer.

Fig. 103

Soit un segment tel qu'il vient d'être indiqué, un segment BΔ égal à l'axe, sur lequel BK soit double de KΔ, et KP égal au paramètre ; soit de plus, un segment de droite TB égal aux trois demis de BP et un segment TΔ égal aux trois demis de KP ; que

η′.

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν τὸν ἄξονα ἔχῃ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ἐλάσσονα δὲ ἢ ὥστε ποτὶ τὰν μέχρι τοῦ ἄξονος τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον ὃν ἔχει τὰ $\overline{\iota\epsilon}$ ποτὶ τὰ $\overline{\delta}$, ὅταν τὸ βάρος ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ τοῦ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρόν, ὥστε τὰν βάσιν μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, οὔτ' ἐς ὀρθὸν ἀποκαταστασεῖται οὔτε μενεῖ κεκλιμένον, πλὴν ὁπόταν ὁ ἄξων αὐτοῦ ποτὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν ποιῇ γωνίαν ἴσαν τᾷ μελλούσᾳ λέγεσθαι.

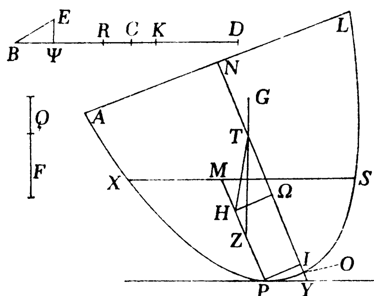


Fig. 103

Ἔστω τμᾶμα οἷον εἴρηται, καὶ ἁ ΒΔ ἴσα τῷ ἄξονι, καὶ ἁ μὲν ΒΚ τᾶς ΚΔ διπλασία, ἁ δὲ ΚΡ ἴσα τᾷ μέχρι τοῦ ἄξονος, ἔστω δὲ καὶ ἁ μὲν ΤΒ ἡμιολία τᾶς ΒΡ, ἁ δὲ ΤΔ τᾶς ΚΡ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ

3 ἢ om. C ‖ 5 $\overline{\iota\epsilon}$ ℒ : $\overline{\iota\epsilon}$ η C ‖ 11 οὔτε μενεῖ ℒ : οὐ μὴν C ‖ 12 τοῦ om. C ‖ 16 δὲ ℒ : δὴ C ‖ 16-17 ἁ δὲ ΤΔ τᾶς ΚΡ om. ℒ ‖ 17 δὲ ℒ : δὴ C.

le rapport du carré sur la somme de Φ et de X au carré sur ΔB soit égal au rapport entre le poids du segment de paraboloïde et le poids du liquide (sc. de même volume). Soit, de plus, Φ double de X. Il est, dès lors, évident que le rapport de la somme de Φ et X à ΔB est inférieur au rapport de TB à BΔ ; car TB est l'excès de l'axe sur les trois demis du paramètre[1] ; il s'ensuit[2] que la somme de Φ et de X est inférieure à BT et que, par conséquent, Φ est à son tour inférieur à BP. Soit PΨ égal à Φ ; menons la perpendiculaire ΨE à BΔ ; que le carré sur ΨE soit équivalent à la moitié du rectangle compris entre KP et BΨ ; menons la droite BE. Il faut démontrer que le segment, abandonné dans le liquide de la manière indiquée, prendra une position inclinée telle que son axe fera avec la surface du liquide un angle égal à l'angle EBΨ.

Abandonnons, en effet, un segment dans le liquide ; que sa base ne touche pas la surface du liquide, et que l'angle entre son axe et la surface du liquide ne soit pas, si possible, égal à l'angle B (sc. EBΨ), mais d'abord plus grand.

Que l'intersection du segment avec un plan passant par son axe et perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole ΑΠΟΛ ; soit ΞΣ la trace du plan sécant dans la surface du liquide, NO l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Menons parallèlement à ΞΣ la droite ΠΥ, tangente à la parabole ΑΠΟΛ au point Π ; menons aussi la parallèle ΠM à NO et la perpendiculaire ΠI à NO ; soit OΩ égal à BP et ΩΘ égal à PK, et soit ΩH perpendiculaire à l'axe. Du moment donc que, par hypothèse, l'axe du segment fait avec la surface du liquide un angle supérieur à l'angle de sommet B, il est évident que dans le triangle

1. On a en effet : $TB = B\Delta - T\Delta = B\Delta - \frac{3}{2}KP$, et par hypothèse $\frac{(\Phi+X)^2}{\overline{B\Delta}^2} = \frac{\text{poids du segm.}}{\text{poids du liqu.}} < \frac{\overline{TB}^2}{\overline{B\Delta}^2}$.

2. Cf. Eucl. V, 10.

ὑγρόν, τοῦτον ἐχέτω τὸ ἀπὸ τᾶς ΦΧ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΒ, ἔστω δὲ καὶ ἁ Φ <διπλασία τᾶς Χ. Δῆλον οὖν ὅτι> ἁ ΦΧ ποτὶ τὰν ΔΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΤΒ ποτὶ τὰν ΒΔ · ἔστι γὰρ ἁ ΤΒ ἁ ὑπεροχά, ᾇ μείζων ἢ ἡμιόλιος ὁ ἄξων τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος · ἐλάσσων ἄρα ἁ ΦΧ τᾶς ΒΤ · ὥστε καὶ ἁ Φ τᾶς ΒΡ. Ἔστω δὴ τᾷ Φ ἴσα ἁ ΡΨ, καὶ τᾷ ΒΔ ὀρθὰ ἄχθω ἁ ΨΕ δυναμένα τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπὸ τῶν ΚΡ, ΒΨ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΒΕ. Δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν ὡς εἴρηται καταστασεῖται κεκλιμένον, ὥστε τὸν ἄξονα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ποιεῖν γωνίαν ἴσαν τᾷ ΕΒΨ.

Ἀφείσθω γάρ τι ἐς τὸ ὑγρὸν τμᾶμα, καὶ ἁ βάσις αὐτοῦ μὴ ἁπτέσθω τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καί, εἰ δυνατόν, μὴ ποιείσθω ὁ ἄξων αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἴσαν τᾷ Β, ἀλλὰ μείζω πρῶτον.

Τμαθέντος δὴ τοῦ τμάματος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ τομὰ ἔστω ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἐν δὲ τᾷ τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείᾳ ἁ ΞΣ, ἄξων δὲ καὶ διάμετρος [τοῦ τμήματος] ἁ ΝΟ. Ἄχθω δὴ καὶ ἁ μὲν ΠΥ παρὰ τὰν ΞΣ ἐφαπτομένα τᾶς ΑΠΟΛ τομᾶς κατὰ τὸ Π, ἁ δὲ ΠΜ παρὰ τὰν ΝΟ, ἁ δὲ ΠΙ κάθετος ἐπὶ τὰν ΝΟ, καὶ τᾷ ΒΡ ἔστω ἴσα ἁ ΟΩ, τᾷ δὲ ΡΚ ἁ ΩΘ, καὶ ὀρθὰ ἁ ΩΗ τῷ ἄξονι. Ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ὁ ἄξων τοῦ τμάματος ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν μείζονα τᾶς Β, δῆλον ὅτι τοῦ ΠΙΥ τριγώνου ἁ ποτὶ τῷ

1 ἐχέτω om. 𝒢 ‖ 2 ΔΒ ms. 𝒢 : ΑΒ ms. C ‖ 2-3 διπλασία τᾶς Χ. Δῆλον οὖν ὅτι Heiberg : dupla ipsius q. palam igitur quod 𝒢 ‖ 4 ΤΒ pr. ms. 𝒢 : Β ms. C ‖ ἁ ΤΒ ἁ Heiberg : quae gd 𝒢 om. C ‖ 5 ἢ om. C ‖ 7 ΡΨ Heiberg : rx 𝒢 ‖ 8 ΚΡ, ΒΨ Heiberg : krx 𝒢 ‖ 11 γωνίαν ἴσαν τᾷ ΕΒΨ Heiberg : angulum aequalem angulo ebx 𝒢 ‖ 12 ἀφείσθω Heiberg : ἀφήσθω C demittatur 𝒢 ‖ 17 ὀρθῷ om. C ‖ ἔστω Comm. : ἔσται 𝒢C ‖ 18 ὀρθογωνίου 𝒢 : ὀρθογώνιον C ‖ 21 δὲ pr. 𝒢 : μὲν C ‖ παρὰ 𝒢 : ἄρα C ‖ 22 ἴσα ἁ ΟΩ Heiberg : ἡ ΗΒ τῇ ΟΩ ms. C aequalis ipsi iω 𝒢 ‖ τᾷ δὲ ΡΚ ἁ ΩΘ Heiberg : ἁ δὲ ΡΚ τᾷ ΩΘ ms. C quae autem rk ipsi tw 𝒢.

ΠΙΥ l'angle en Υ est supérieur[1] à l'angle B ; il s'ensuit que le rapport du carré sur ΠΙ au carré sur ΙΥ est supérieur au rapport du carré sur ΕΨ au carré sur ΨΒ. Mais le rapport du carré sur ΠΙ au carré sur ΙΥ est égal au rapport de ΚΡ à ΥΙ, et le rapport du carré sur ΕΨ au carré sur ΨΒ est égal au rapport de la moitié de ΚΡ à ΨΒ ; il s'ensuit que le rapport de ΚΡ à ΥΙ est supérieur au rapport de la moitié de ΚΡ à ΨΒ ; ΥΙ est donc inférieur[2] au double de ΨΒ ; or ΙΥ est double de ΟΙ ; par conséquent, ΟΙ est inférieur à ΨΒ, de façon que ΙΩ est supérieur[3] à ΨΡ. Mais ΨΡ est égal à Φ ; ΙΩ est donc supérieur à Φ. Comme on a supposé, d'autre part, que le rapport entre le poids du segment à celui du liquide est égal au rapport du carré sur la somme de Φ et de Χ au carré sur ΒΔ, et comme le rapport entre le poids du segment et le poids du liquide (sc. de même volume) est égal[4] au rapport de la partie immergée du segment au segment entier, et que, enfin, le rapport de la partie immergée au segment entier est égal[5] au rapport du carré sur ΠΜ au carré sur ΟΝ, le rapport du carré sur la somme de Φ et de Χ au carré sur ΒΔ sera égal au rapport du carré sur ΜΠ au carré sur ΟΝ ; il s'ensuit que la somme de Φ et de Χ est égale à ΠΜ. Or on a démontré que ΠΗ est supérieur à Φ ; il est donc évident[6] que ΠΜ est inférieur aux trois demis de ΠΗ, et que ΠΗ est supérieur au double de ΗΜ. Soit donc ΠΖ double de ΖΜ ; dès lors, le centre de gravité du solide[7] sera le point Θ, celui de la partie immergée[8] dans le liquide le point Ζ ; le centre de gravité de la grandeur restante sera donc situé[9] sur le prolongement de la droite

1. Cf. Eucl. I, 29.
2. Cf. Eucl. V, 10.
3. Cf. plus haut.
4. Cf. prop. II, 1.
5. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 24.
6-7. Cf. notes complémentaires.
8. Cf. prop. II, 2.
9. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.

Υ γωνία μείζων τᾶς Β · μείζονα δὴ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΙ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΙΥ ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΨ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΨΒ. Ἀλλ' ὃν μὲν λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΙ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΙΥ, τοῦτον ἔχει ἁ ΚΡ ποτὶ ΥΙ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΨ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΨΒ, τοῦτον ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ΚΡ ποτὶ τὰν ΨΒ · μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΚΡ ποτὶ τὰν ΥΙ ἤπερ ἁ ἡμίσεια τᾶς ΚΡ ποτὶ τὰν ΨΒ · ἐλάσσων ἄρα ἢ διπλασία ἁ ΥΙ τᾶς ΨΒ. Τᾶς δὲ ΟΙ διπλασία ἁ ΙΥ · ἐλάσσων ἄρα ἁ ΟΙ τᾶς ΨΒ · ὥστε ἁ ΙΩ μείζων ἐστὶ τᾶς ΨΡ. Ἁ δὲ ΨΡ ἴσα ἐστὶ τᾷ Φ · μείζων ἄρα ἐστὶν ἁ ΙΩ τᾶς Φ. Καὶ ἐπεὶ ὑπόκειται τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἔχειν λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΦΧ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ ποτὶ τὸ ὅλον τμᾶμα, ὃν δὲ τὸ δεδυκὸς ποτὶ τὸ ὅλον, τοῦτον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΜ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΟΝ, ὃν ἄρα λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΦΧ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΜΠ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΟΝ · ἴσα ἄρα ἐστὶν ἁ ΦΧ τᾷ ΠΜ. Ἁ δὲ ΠΗ ἐδείχθη μείζων ἐοῦσα τᾶς Φ · δῆλον οὖν ὅτι ἁ ΠΜ ἐλάσσων ἢ ἡμιολία ἐστὶν τᾶς ΠΗ, ἁ δὲ ΠΗ τᾶς ΗΜ μείζων ἢ διπλασίων. Ἔστω οὖν ἁ ΠΖ διπλασίων τᾶς ΖΜ · ἐσσεῖται δὴ τὸ μὲν Θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ στερεοῦ, τοῦ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ Ζ · τοῦ δὴ λοιποῦ μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΖΘ εὐθείας

1 μείζων 𝓛 : μεῖζον C ‖ 7 τὸ om. 𝓛 ‖ ἁ om. C ‖ 9 διπλασία Heiberg : διπλῆ C ‖ 10 ΨΒ ms. C : cd 𝓛 ‖ ΟΙ διπλασία ἁ ΙΥ om. C : oi dupla est quae ω propter septimum theorema primi libri elementorum conicorum Apollonii 𝓛 ‖ 12 τᾷ 𝓛 : τῆς C ‖ 14 τὸ pr. om. C ‖ 24 ἢ om. C ‖ 25 ΗΜ ms. 𝓛 : ΝΜ ms. C ‖ 26 τοῦ alt. om. C.

joignant Z à Θ. Qu'elle soit prolongée jusqu'au point Γ ; on démontrera de la même manière que ΘH est perpendiculaire à la surface du liquide ; la partie du segment immergée dans le liquide ira hors du liquide suivant la perpendiculaire menée par Z à la surface du liquide, et la partie qui émerge du liquide descendra dans le liquide suivant la perpendiculaire menée par Γ ; le segment ne restera donc pas dans la position inclinée que nous avions supposée.

Mais il ne se redressera pas non plus dans la position droite. Ceci est évident pour les raisons que voici : du moment que des deux perpendiculaires menées par Z et Γ celle qui est menée par Z tombe du côté de la droite ΓZ où se trouve le point Λ et que celle qui est menée par Γ tombe du côté où se trouve le point A, il est évident que, en vertu de ce qui a été dit plus haut[1], le centre Z montera, alors que le centre Γ descendra ; par conséquent, les parties de la grandeur entière situées du côté de A descendront.

Ces considérations étaient utiles pour la démonstration.

Faisons de nouveau les mêmes hypothèses, mais que l'axe du segment fasse avec la surface du liquide un angle inférieur à l'angle de sommet B ; dès lors, le rapport du carré sur ΠI au carré sur IΥ est inférieur au rapport du carré sur EΨ au carré sur ΨB ; il s'ensuit que le rapport de KP à ΥI est inférieur au rapport de la moitié de KP à ΨB. Le segment IΥ sera donc supérieur au double de ΨB, et par conséquent ΩI inférieur à ΨP. Le segment ΠH sera donc lui aussi inférieur au segment Φ. Mais MΠ est égal à la somme de Φ et de X ; il est donc évident que ΠM est supérieur au trois demis de ΠH, et que ΠH est inférieur au double

1. Cf. la fin de la prop. I, 7.

ἐπιζευχθείσας καὶ ἐκβληθείσας. Ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Γ· δειχθήσεται δὴ ὁμοίως ἁ ΘΗ κάθετος ἐοῦσα ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν, καὶ τὸ μὲν ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμᾶμα ἐνεχθήσεται εἰς τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ κατὰ τὰν διὰ τοῦ Ζ ἀγμέναν κάθετον ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν, τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ ἐνεχθήσεται εἰς τὸ ἐντὸς κατὰ τὰν διὰ τοῦ Γ· οὐ μενεῖ δὴ τὸ τμᾶμα κατὰ τὰν ὑποκειμέναν κλίσιν.

Οὐδὲ μὴν εἰς τὸ ὀρθὸν ἀποκαταστασεῖται. Δῆλον δὲ διὰ τούτων· ἐπειδὴ τῶν ἀγμένων διὰ τῶν Ζ, Γ καθέτων ἁ μὲν διὰ τοῦ Ζ ἀγμένα τᾶς ΓΖ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρεα πίπτει, ἐφ᾿ ἅ ἐστι τὸ Λ, ἁ δὲ διὰ τοῦ Γ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Α, δῆλον ὅτι διὰ τὰ προειρημένα τὸ μὲν Ζ κέντρον ἄνω οἰσθήσεται, τὸ δὲ Γ κάτω· ὥστε τοῦ ὅλου μεγέθεος τὰ μέρεα τὰ ἀπὸ τοῦ Α κάτω οἰσθήσεται.

Τοῦτο δ᾿ ἦν εὔχρηστον ποτὶ τὸ δεῖξαι.

Ὑποκείσθω πάλιν τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, ὁ δὲ ἄξων τοῦ τμάματος ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ποιεί⟨τω γωνίαν ἐλάσσονα τᾶς ποτὶ τῷ Β· ἐλάσσονα δὴ λόγον⟩ ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΙ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΙΥ ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΨ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΨΒ· καὶ ἁ ΚΡ ἄρα ποτὶ τὰν ΥΙ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ ἡμίσεια τᾶς ΚΡ ποτὶ τὰν ΨΒ. Μείζων ἄρα ἐσσεῖται ἢ διπλασίων ἁ ΙΥ τᾶς ΨΒ· ἁ ἄρα ΩΙ ἐλάσσων τᾶς ΨΡ. Ἐσσεῖται οὖν καὶ ἁ ΠΗ ἐλάσσων τᾶς Φ. Ἁ δὲ ΜΠ τᾷ ΦΧ ἴσα· δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἢ ἡμιολία ἁ ΠΜ τᾶς ΠΗ, ἁ δὲ ΠΗ ἐλάσσων ἢ διπλασίων

1 ἐκβληθείσας om. C ‖ Γ ms. 𝔊 : ΕΠ ms. C ‖ 2 δὴ Heiberg : δὲ C autem 𝔊 ‖ 7 δὴ Heiberg : δὲ C𝔊 ‖ 12 ἐστι τὸ Λ Comm. : ἐστι τὸ Γ ms. C est et secundum g 𝔊 ‖ τῷ Α Comm. : τῇ Ζ ms. C ipsi zg 𝔊 ‖ 16 τοῦτο Heiberg : hoc 𝔊 τοῦ C ‖ εὔχρηστον C : inutile 𝔊 ‖ 20 ΙΥ ms. C : iω 𝔊 ‖ 21 ΕΨ ms. C : ex 𝔊 ‖ 22 ΥΙ ms. C : ωi 𝔊 ‖ ἤπερ ἁ om. C ‖ 23 μείζων Heiberg : μεῖζον C𝔊 ‖ 24 ΠΗ ms. C : ph 𝔊 ‖ 25 τᾷ Heiberg : τῆς C ipsi 𝔊 ‖ ἴσα Heiberg : est aequalis 𝔊 om. C ‖ οὖν Heiberg : om. 𝔊C.

de HM. Soit donc ΠZ double de ZM. De nouveau donc le centre de gravité du segment entier sera le point Θ, et celui de la partie immergée dans le liquide le point Z ; la droite ZΘ menée et prolongée, le centre de gravité de la partie du segment qui émerge du liquide sera situé sur le prolongement de cette droite.[1] Soit Γ ce centre ; menons par les points Z et Γ les perpendiculaires, parallèles à HΘ, à la surface du liquide ; il est dès lors évident que le segment entier ne restera pas dans sa position, mais prendra une position inclinée telle que l'axe fera avec la surface du liquide un angle plus grand que celui qu'il fait maintenant.

Fig. 104

Du moment donc que le segment ne prendra une position stable ni quand l'angle que fait l'axe avec la surface du liquide est plus grand que l'angle de sommet B, ni quand cet angle est plus petit que l'angle en B, il est clair qu'il prendra une position stable quand cet angle est égal à l'angle en B ; car IO sera alors égal à ΨB, ΩI égal à ΨP, ΠH égal à Φ ; il s'ensuit[2] que MΠ sera égal aux trois demis de ΠH, et ΠH double

1. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.

2. Parce que l'égalité des angles en B et en Y entraîne la similitude des triangles BEΨ et ΠYI.

τᾶς ΗΜ. Ἔστω οὖν ἁ ΠΖ τᾶς ΖΜ διπλασία. Πάλιν οὖν τοῦ μὲν ὅλου κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ Θ, τοῦ δ' ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ Ζ· ἐπιζευχθείσας δὴ τᾶς ΖΘ καὶ ἐκβληθείσας ἐσσεῖται τὸ ⟨κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τᾶς ἐκβληθείσας. Ἔστω τὸ Γ, καὶ ἄχθωσαν κά⟩θετοι ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν διὰ τῶν Ζ, Γ παρὰ τὰν ΗΘ· δῆλον οὖν ὅτι οὐ μενεῖ τὸ ὅλον τμᾶμα, ἀλλὰ κλιθήσεται, ὥστε τὸν ἄξονα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ποιεῖν γωνίαν μείζονα ἇς νῦν ποιεῖ.

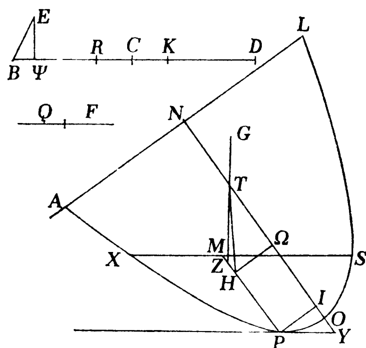


Fig. 104

Ἐπεὶ οὖν οὔτε γωνίαν μείζονα τᾶς Β ποιοῦντος τοῦ ἄξονος ποτὶ τὸ ὑγρὸν σταθήσεται τὸ τμᾶμα οὔτ' ἐλάσσονα, φανερὸν ὅτι ταλικαύταν ποιοῦντος γωνίαν σταθήσεται· οὕτως γὰρ ἁ ΙΟ ἐσσεῖται ἴσα τᾷ ΨΒ καὶ ἁ ΩΙ τᾷ ΨΡ καὶ τᾷ Φ ἁ ΠΗ· ἡμιολία ἄρα ἐσσεῖται ἁ ΜΠ τᾶς ΠΗ, ἁ δὲ ΠΗ τᾶς ΗΜ διπλασία. Τὸ Η ἄρα τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ βάρεος

1 διπλασία Heiberg : διπλῇ C ‖ 3 δὴ Heiberg : δὲ C𝒢 ‖ 4 ἐσσεῖται C : inuenietur 𝒢 ‖ 4-6 κέντρον — κάθετοι rest. Heiberg : centrum eius quod extra humidum in educta e t sit g, et ducantur perpendiculares 𝒢 ‖ 7 ΗΘ ms. C : no 𝒢 ‖ 11 σταθήσεται C : consistit 𝒢 ‖ 13 ΨΡ ms. C : xr 𝒢 ‖ 14 τᾷ Φ ἁ ΠΗ Heiberg : τῇ Φ ἡ ΠΡ ms. C et quae ph ipsi f 𝒢 ‖ ΜΠ Heiberg : Η ms. C mh 𝒢.

de HM. Le point H est donc le centre de gravité de la partie immergée dans le liquide[1] ; par conséquent, celle-ci montera suivant la verticale de ce point, et la partie qui émerge descendra ; le segment (sc. entier) restera donc en place ; car ses parties se poussent l'une l'autre en sens contraire.

9.

Si un segment droit de paraboloïde a un axe supérieur aux trois demis du paramètre, mais trop petit pour que son rapport (sc. au paramètre) soit égal au rapport de quinze à quatre, et si le rapport de son poids à celui du liquide (sc. de même volume) est supérieur au rapport entre l'excès du carré de l'axe sur le carré de l'excès de l'axe sur les trois demis du paramètre, d'une part, et le carré de l'axe, d'autre part, ce segment, abandonné dans le liquide, de manière que sa base soit entièrement dans le liquide, et placé dans une position inclinée, ne se dressera pas de manière que son axe soit dans la verticale, et il ne restera incliné que si son axe fait avec la surface du liquide un angle égal à celui qui a été pris précédemment[2].

Fig. 105

1. Cf. prop. II, 2.
2. Cf. prop. II, 8.

κέντρον ἐστίν· ὥστε κατὰ τὰν αὐτὰν κάθετον ἀνενεχθήσεται, καὶ τὸ ἐκτὸς ἐς τὸ κάτω ἐνεχθήσεται. Μενεῖ ἄρα· ἀντωθοῦνται γὰρ ὑπ' ἀλλάλων.

θ'.

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν τὸν ἄξονα ἔχῃ μείζονα μὲν ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ἐλάσσονα δὲ ἢ ὥστε τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ $\overline{\iota\epsilon}$ ποτὶ $\overline{\delta}$, καὶ τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν μείζονα λόγον ἔχῃ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ὑπεροχά, ᾇ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος τετράγωνον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, τεθὲν κεκλιμένον οὔτε κατασταθήσεται, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ κατὰ κάθετον εἶμεν, οὔτε μενεῖ κεκλιμένον, πλὴν ὅταν ὁ ἄξων αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ποιῇ γωνίαν ἴσαν τᾷ λαφθείσᾳ ὁμοίως ᾇ πρότερον.

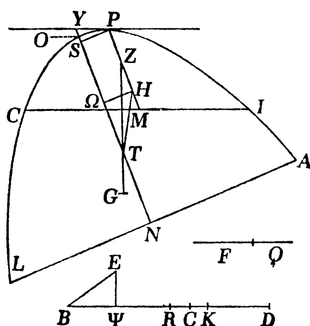


Fig. 105

6 τᾶς Heiberg : τοῦ C ‖ 7 ἢ om. 𝔏 ‖ 9 τοῦ Heiberg : τὸ C ‖ 15 αὐτοῦ 𝔏 : αὐτὸν C ‖ 17 ποιῇ Heiberg : ποιεῖ C fecerit 𝔏.

Soit un segment tel qu'il vient d'être indiqué, et un segment de droite ΔB égal à l'axe du segment (sc. de paraboloïde) ; soit BK double de KΔ, KP égal au paramètre, et TB égal aux trois demis de BP ; que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide soit égal au rapport entre l'excès du carré de BΔ sur le carré de la somme de Φ et X, d'une part, et le carré de BΔ, d'autre part ; que le segment de droite Φ soit double de X. Il est, dès lors, évident que le rapport entre l'excès du carré de BΔ sur le carré de BT, d'une part, et le carré sur BΔ, d'autre part, est inférieur au rapport entre l'excès du carré de BΔ sur le carré de la somme de Φ et X, d'une part, et le carré de BΔ, d'autre part ; car BT est l'excès de l'axe du segment sur les trois demis du paramètre[1]. Il s'ensuit que l'excès du carré de BΔ sur le carré de la somme de Φ et X est supérieur[2] à l'excès du carré de BΔ sur le carré de BT, de façon que la somme de Φ et de X est inférieure à BT et que, partant, Φ est inférieur à BP.

Soit donc PΨ égal à Φ ; menons la perpendiculaire ΨE à BΔ ; que le carré sur ΨE soit équivalent à la moitié du rectangle compris entre KP et ΨB. Je dis que si le segment est abandonné dans le liquide de manière que sa base soit entièrement dans le liquide, il prendra une position telle que son axe fera avec la surface du liquide un angle égal à l'angle de sommet B.

Que le segment soit, en effet, abandonné dans le liquide de la manière indiquée ; que l'angle de son axe avec la surface du liquide ne soit pas égal à l'angle B, mais d'abord plus grand que B.

Que l'intersection du segment avec un plan perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole

1. Cf. prop. II, 8.
2. Cf. Eucl. V, 10.

Ἔστω τμᾶμα οἷον εἴρηται, καὶ κείσθω ἁ ΔΒ ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ ἁ μὲν ΒΚ τᾶς ΚΔ διπλασία ἔστω, ἁ δὲ ΚΡ ἴσα τᾷ μέχρι τοῦ ἄξονος, ἁ δὲ ΤΒ ἡμιολία τᾶς ΒΡ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἐχέτω ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἔστω δὲ ἁ Φ διπλασία τᾶς Χ. Δῆλον οὖν ὅτι ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΤ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ· ἔστι γὰρ ἁ ΒΤ ἁ ὑπεροχά, ᾇ μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλιος ὁ ἄξων τοῦ τμάματος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. Μείζονι ἄρα ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΤ· ὥστε ἁ ΦΧ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ΒΤ· καὶ ἁ Φ ἄρα τᾶς ΒΡ.

Ἔστω οὖν τᾷ Φ ἴσα ἁ ΡΨ, καὶ ἁ ΨΕ ὀρθὰ ἄχθω τᾷ ΒΔ δυναμένα τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ΚΡ, ΨΒ. Φαμὶ ὅτι τὸ τμᾶμα ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρόν, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, καταστασεῖται οὕτως, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ἴσαν τᾷ Β.

Ἀφείσθω [μὲν] γὰρ τὸ τμᾶμα, ὡς εἴρηται, ἐς τὸ ὑγρόν, καὶ μὴ ποιείτω ὁ ἄξων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ἴσαν τᾷ Β, ἀλλὰ μείζονα πρότερον.

Τμαθέντος δὴ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἔστω τοῦ τμάματος τομὰ ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου

4 τῷ Heiberg : τὸ C || 9 τοῦ Heiberg : τὸ C || 10 ἐλάσσονα — 13 ὑπεροχά suppl. Comm. : om. Cℒ || 13 τοῦ Heiberg : τὸ C || 19 ΡΨ, καὶ ἁ ΨΕ ms. C : rx et quae xe ℒ || 20 ὑπὸ τᾶν Heiberg : ὑπὲρ τῆς C sub ℒ || 25 μὲν Cℒ : del. Heiberg || 28 δὴ Heiberg : δὲ Cℒ.

ΑΠΟΛ ; soit TI la trace du plan sécant dans la surface du liquide, NO l'axe et le diamètre de la parabole ; coupons NO, comme précédemment[1], par les points Ω et Θ ; menons la droite ϒΠ parallèle à TI et tangente à la parabole en Π, la droite ΠΜ parallèlement à NO et la droite PS (sc. ΠΣ) perpendiculaire à l'axe. Du moment donc que l'axe du segment fait avec la surface du liquide un angle supérieur à l'angle de sommet B, l'angle SYP sera lui aussi supérieur[2] à l'angle B ; il s'ensuit que le rapport du carré sur PS au carré sur SY est supérieur au rapport du carré sur ΨE au carré sur ΨB. Par conséquent, le rapport de KR à SY est lui aussi supérieur au rapport de la moitié de KR à ΨB ; SY est donc inférieur[3] au double de ΨB, et SO est inférieur à ΨB. Le segment de droite ΣΩ est donc supérieur à PΨ, et ΠΗ est supérieur à Φ. Et comme le rapport du poids du segment au poids du liquide est égal au rapport entre l'excès du carré de ΒΔ sur le carré de la somme de Φ et X, d'une part, et le carré de ΒΔ d'autre part, et que le rapport du poids du segment au poids du liquide est égal au rapport de la partie immergée du segment au segment entier, il est évident que le rapport de la partie immergée au segment entier sera égal au rapport de l'excès du carré de ΒΔ sur le carré de la somme de Φ et X au carré de ΒΔ ; il s'ensuit que le rapport du segment entier à la partie qui émerge du liquide sera égal[4] au rapport du carré sur ΒΔ au carré sur la somme de Φ et de X. Or le rapport du segment entier à la partie qui émerge du liquide est égal[5] au rapport du carré sur NO au carré sur ΠΜ ; le segment de droite ΜΠ est donc égal[6] à la

1. Cf. prop. II, 8.
2. Cf. Eucl. I, 29.
3. Cf. Eucl. V, 10.
4. Cf. Eucl. V, 7, coroll. ; V, 19, coroll.
5. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 24.
6. Cf. Eucl. V, 9.

κώνου τομά, τᾶς δὲ τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας ἁ ΤΙ, ἄξων δὲ [τῆς τομῆς] καὶ διάμετρος ἁ ΝΟ, καὶ τετμάσθω κατὰ τὰ Ω, Θ, ὡς καὶ πρότερον, ἄχθω δὲ καὶ ἁ μὲν ΥΠ παρὰ τὰν ΤΙ ἐφαπτομένα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Π, ἁ δὲ ΠΜ

aequedistanter ipsi NO, quae vero PS perpendicularis super axem. Quoniam igitur axis portionis ad superficiem humidi facit angulum maiorem angulo B, erit utique et angulus qui sub SYP maior angulo B ; tetragonum ergo quod a PS ad tetragonum quod ab SY habet proportionem maiorem quam tetragonum quod a ΨE ad tetragonum quod a ΨB. Ergo et quae KR ad SY habet proportionem maiorem quam medietas ipsius KR ad ΨB ; minor ergo quae SY quam dupla ipsius ΨB. Et quae SO quam ΨB minor ;

μείζων ἄρα ἁ ΣΩ τᾶς ΡΨ καὶ ἁ ΠΗ τᾶς Φ. Καὶ ἐπεὶ τὸ τμᾶμα βάρει λόγον ἔχει ποτὶ τὸ ὑγρόν, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ μεῖζόν ἐστιν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ τμᾶμα ποτὶ τὸ ὅλον, δῆλον ὅτι τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ μέρος ποτὶ τὸ ὅλον τμᾶμα, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ΒΔ · ἕξει οὖν καὶ τὸ ὅλον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΦΧ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ὅλον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΝΟ ποτὶ τὸ ἀπὸ ΠΜ · ἴσα ἄρα ἁ ΜΠ τᾷ

1 TI ms. ℒ : TIM ms. C ‖ 2 τῆς τομῆς C : portionis ℒ del. Heiberg ‖ 5-15 13 lineae legi nequeunt in C ‖ 16 ἐπεὶ C : si ℒ ‖ 22 ὅλον, δῆλον, ὅτι Heiberg : ὅτι C ‖ 25 ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον C : fq ad tetragonum ℒ.

somme de Φ et de X. Mais on a montré que ΠH est supérieur à Φ ; MH est donc inférieur à X ; il s'ensuit que ΠH est supérieur au double de HM. Soit donc le segment de droite ΠZ double de ZM ; joignons Z à Θ et prolongeons la droite ZΘ jusqu'à Γ ; le segment entier aura donc pour centre de gravité le point Θ, la partie qui émerge du liquide aura pour centre[1] le point Z, et le centre de gravité de la partie immergée sera situé[2] sur la droite ΘΓ ; soit Γ ce centre. On montrera dès lors comme précédemment que ΘH est perpendiculaire à la surface du liquide[3], et que les parallèles à ΘH menées par les points Z et Γ sont elles aussi perpendiculaires à la surface du liquide. Il s'ensuit que la partie du segment qui émerge du liquide descendra suivant la verticale passant par Z, et que la partie immergée montera suivant la verticale passant par Γ ; le segment entier ne restera donç pas sans inclinaison. Mais il ne se dressera pas de manière que son axe soit perpendiculaire à la surface du liquide, puisque ses parties situées du côté de Λ descendront, alors que les parties du côté de A monteront, pour des raisons semblables à celles qui sont indiquées dans la proposition précédente[4].

Mais si l'axe fait avec le liquide un angle inférieur à l'angle B, on montrera de la même manière que plus haut que le segment ne restera pas en place, mais s'inclinera jusqu'à ce que l'axe fasse avec la surface du liquide un angle égal à l'angle B.

1. Cf. prop. II, 2.
2. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.
3. Cf. prop. II, 4.
4. Cf. prop. II, 8.

ΦΧ. Ἁ δὲ ΠΗ δέδεικται μείζων τᾶς Φ· ἁ ἄρα ΜΗ ἐλάσσων ἐστὶν τᾶς Χ· μείζων ⟨ἄρα ἐστὶν ἡ διπλασία ἁ ΠΗ⟩ τᾶς ⟨ΗΜ. Ἔστω δὴ ἁ ΠΖ διπλασία τᾶς ΖΜ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ ΖΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Γ· ἔσται οὖν τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Θ, τοῦ δὲ ἐκτὸς⟩ τοῦ ὑγροῦ τὸ ⟨Ζ, τοῦ δὲ ἐντὸς ἐν τᾷ ΘΓ· ἔστω δὲ τὸ⟩ Γ. ⟨Δειχθήσεται δὴ ὁμοίως τοῖς πρότερον ἁ ΘΗ⟩ κάθετος ἐπὶ ⟨τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ καὶ αἱ διὰ τῶν Ζ, Γ παρὰ τὰν ΘΗ⟩ ἀγόμεναι κάθετοι καὶ αὗται ἐπὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. Κατενεχθήσεται ἄρα τὸ μὲν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμᾶμα ἐς τὸ κάτω κατὰ τὰν διὰ τοῦ Ζ, τὸ δὲ ἐντὸς κατὰ τὰν διὰ τοῦ Γ ἀνενεχθήσεται· οὐ μενεῖ οὖν τὸ ὅλον τμᾶμα ἀκλινές. Οὐδὲ μὴν καταστραφήσεται, ὥστε κατὰ κάθετον εἶμεν τὸν ἄξονα ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν, ἐπειδὴ τὰ ἐπὶ ⟨τὰ αὐτὰ τῷ Λ κάτω, τὰ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Α ἐς τὰ ἄνω οἰσθήσεται,⟩ διὰ τὰ ἀνάλογον τοῖς λεγομένοις ἐπὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ.

Ἐὰν δὲ ὁ ἄξων ποτὶ τὸ ὑγρὸν ποιῇ γωνίαν ἐλάσσονα τᾶς Β, ὁμοίως τοῖς πρότερον δειχθήσεται ὅτι οὐ μενεῖ τὸ τμᾶμα, ἀλλὰ κλιθήσεται, ἕως ἂν ὁ ἄξων ποιῇ γωνίαν ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἴσαν τᾷ Β.

2 <ἄρα ἐστὶν ἡ διπλασία ἁ ΠΗ> Comm. : ergo quae pm est maior quam dupla 𝔊 || 3 <ΗΜ. — 5 ἐκτὸς> Heiberg : hm, sit igitur quae pz dupla ipsius zm et copulata quae zt educatur ad g, erit ergo totius quidem portionis centrum grauitatis t, eius autem quae extra 𝔊 || 6 <Ζ, — 7 ΘΗ> Heiberg : z, eius uero quae intra in linea tg, sit autem g, demonstrabitur autem similiter prioribus quae th 𝔊 || 8 <τὰν — 9 ΘΗ> Heiberg : superficiem humidi et quae per z g aequedistanter ipsi th 𝔊 || 11-12 κατὰ τὰν 𝔊 : om. C || 15 <τὰ — 16 οἰσθήσεται,> Comm. : ex parte l ad superiora ferentur 𝔊 || 16 τὰ ἀνάλογον Heiberg : τὸν ἀνάλογον C proportionalia 𝔊 || 19 μενεῖ Heiberg : μένει C𝔊.

10.

Si un segment droit de paraboloïde, plus léger que le liquide (sc. de même volume), a un axe trop grand pour que son rapport au paramètre soit égal au rapport de quinze à quatre, ce segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base ne touche pas le liquide, prendra tantôt une position droite, tantôt une position inclinée ; son inclinaison sera tantôt telle que sa base touche la surface du liquide en un seul point, ce qui arrivera pour deux positions inclinées, tantôt telle que sa base se trouve mouillée sur une étendue plus grande, tantôt telle, enfin, que sa base ne touche la surface du liquide en aucun point ; nous allons expliquer maintenant pour quels rapports entre le poids du segment et le poids du liquide ces différents cas vont se présenter.

Fig. 106

ι′.

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν κουφότερον ὂν τοῦ ὑγροῦ τὸν ἄξονα ἔχῃ μείζονα ἢ ὥστε λόγον ἔχειν ποτὶ τὰν μέχρι τοῦ ἄξονος [τοῦ] ὃν ἔχει τὰ $\overline{\iota\epsilon}$ ποτὶ τὰ $\overline{\delta}$, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, ὁτὲ μὲν ὀρθὸν κατασταθεῖται, ὁτὲ δὲ κεκλιμένον, καὶ ποτὲ μὲν οὕτω κεκλιμένον, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ καθ' ἓν σαμεῖον ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καὶ τοῦτο ἐν δισσοῖς κλιμάτεσσι ποιήσει, ποτὲ δὲ οὕτως κεκλιμένον κατασταθεῖται, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ κατὰ πλείονα τόπον βρέχεσθαι, ποτὲ δὲ οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφα⟨νείας · ὃν δὲ λόγον ἔχοντος τῷ⟩ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἕκαστα αὐτῶν ἐσσεῖται, νῦν δηλωθήσεται.

Fig. 106

3 ἢ ℒ : om. C ‖ 4 [τοῦ] C : τοῦ ὃν ℒ del. Heiberg ‖ 13 <ὃν δὲ λόγον ἔχοντος τῷ> Heiberg : quam autem proportionem habente ad ℒ.

Soit un segment tel qu'il vient d'être indiqué ; que l'intersection de sa surface avec un plan perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole ΑΠΟΛ, et soit ΒΔ l'axe et le diamètre de la parabole ; coupons ΒΔ par le point Κ de manière que ΒΚ soit double de ΚΔ, et par le point Τ de manière que ΔΒ soit à ΚΤ comme quinze est à quatre ; il est dès lors évident que ΚΤ est supérieur au paramètre[1]. Soit donc ΚΡ égal au paramètre, et ΡΣ égal à la moitié de ΒΡ ; alors ΣΒ est égal aux trois demis de ΒΡ. Menons la droite ΑΒ, élevons la perpendiculaire ΤΕ (sc. sur ΒΔ,) menons la parallèle ΕΖ à ΒΔ, divisons ΑΒ en deux parties égales par le point Θ et menons la parallèle ΘΗ à ΒΔ ; donnons nous la parabole ΑΕΙ de diamètre ΕΖ, et la parabole ΑΘΔ de diamètre ΘΗ, de manière que les segments ΑΕΙ et ΑΘΔ (sc. de ces paraboles) soient semblables[2] au segment ΑΒΔ ; la parabole ΑΕΙ sera, dès lors, décrite par le point[3] Κ, et la perpendiculaire élevée en Ρ à ΒΔ coupera[4] la parabole ΑΕΙ. Soit Υ et Γ les points d'intersection ; menons par Υ et Γ les parallèles ΥΧ et ΓΝ à ΒΔ ; que ces parallèles coupent le segment de parabole ΑΘΔ aux points Ξ et Φ ; menons aussi les droites ΠΨ et Ο϶, tangentes au segment ΑΠΟΛ aux points Ο et Π. Sont donc donnés les trois segments ΑΠΟΛ, ΑΕΙ et ΑΘΔ, compris entre des droites et des paraboles, semblables mais inégaux, des segments de droite étant découpés de chaque base, les segments ΝΞ, ΝΓ et ΝΟ étant érigés du point Ν ; dès lors, le rapport de ΟΓ à ΓΞ sera égal

1-2. Cf. notes complémentaires.

3. D'après la prop. 4 du traité *La quadr. de la parab.*, la parabole ΑΕΙ passe par le point Κ, si $\frac{\Delta Z}{ZA} = \frac{BK}{B\Delta}$; or on a, d'après Eucl. VI, 2, $\frac{\Delta Z}{ZA} = \frac{BE}{EA} = \frac{BT}{T\Delta} = \frac{BK}{B\Delta} = \frac{2}{3}$, puisque $B\Delta = BK + K\Delta = 3K\Delta = \frac{15}{4}\,KT$; $BT = BK - KT = \frac{3}{2}\,KT$, et $T\Delta = \Delta K + KT = \frac{9}{4}\,KT$.

4. Parce que $ZE = DT > \Delta P$.

Ἔστω τμᾶμα οἷον εἴρηται, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ τομὰ ἔστω ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἄξων δὲ ἔστω καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΒΔ, τετμάσθω δὲ ἁ ΒΔ κατὰ τὸ Κ, ὥστε διπλασίαν εἶμεν τὰν ΒΚ τᾶς ΚΔ, κατὰ δὲ τὸ Τ, ὥστε τὰν ΔΒ ποτὶ τὰν ΚΤ λόγον ἔχειν ὡς τὰ $\overline{\iota\epsilon}$ ποτὶ $\overline{\delta}$· δῆλον οὖν ὅτι ἁ ΚΤ μείζων ἐστὶ τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. Ἔστω οὖν ἁ ΚΡ ἴσα τᾷ μέχρι τοῦ ἄξονος, τᾶς δὲ ΒΡ ἡμίσεια ἔστω ἁ ΡΣ· ἔστι δὴ καὶ ἁ ΣΒ ἡμιολία τᾶς ΒΡ. Ἐπιζευχθείσας δὲ τᾶς ΑΒ καὶ τᾶς ΤΕ ὀρθᾶς ἀχθείσας ἄχθω ἁ ΕΖ παρὰ τὰν ΒΔ, καὶ πάλιν τᾶς ΑΒ δίχα τμαθείσας κατὰ τὸ Θ ἄχθω παρὰ τὰν ΒΔ ἁ ΘΗ, καὶ λελάφθω ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ ΑΕΙ περὶ διάμετρον τὰν ΕΖ καὶ ἁ ΑΘΔ περὶ διάμετρον τὰν ΘΗ, ὥστε ὅμοια εἶμεν τὰ ΑΕΙ, ΑΘΔ τμάματα τῷ ΑΒΛ τμάματι· γραφήσεται δὴ ἁ ΑΕΙ κώνου τομὰ διὰ τοῦ Κ, ἁ δὲ ἀπο τοῦ Ρ ὀρθὰ ἀχθεῖσα τᾷ ΒΔ τεμεῖ τὰν ΑΕΙ. Τεμνέτω κατὰ τὰ Υ, Γ, καὶ διὰ τῶν Υ, Γ ἄχθωσαν παρὰ τὰν ΒΔ αἱ ΥΧ, ΓΝ, τεμνέτωσαν δὲ αὗται τὰν ΑΘΔ τομὰν κατὰ τὰ Ξ, Φ, ἄχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΠΨ, ΟϚ ἐφαπτόμεναι τᾶς ΑΠΟΛ τομᾶς κατὰ τὰ Ο, Π. Δεδομένα δὴ τρία τινὰ τμάματα τὰ ΑΠΟΛ, ΑΕΙ, ΑΘΔ περιεχόμενα ὑπὸ τᾶν εὐθειᾶν καὶ τᾶν ὀρθογωνίων κώνων τομᾶν ὀρθὰ καὶ ὅμοια, ἄνισα δέ, καὶ ἀπολέλαπται ἀφ᾿ ἑκάστας βάσιος, ἀπὸ δὲ τοῦ Ν ἀναγμέναι αἱ ΝΞ, ΝΓ, ΝΟ· ἁ ΟΓ ἄρα ποτὶ τὰν ΓΞ τὸν συγκείμενον λόγον ἕξει ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἁ

3 ἁ 𝓛 : om. C ‖ 5 διπλασιάν εἶμεν Heiberg : διπλῆν εἶναι C dupla sit 𝓛 ‖ BK ms. C : bd 𝓛 ‖ 6 T ms. C : c 𝓛 ‖ KT ms. C : kc 𝓛 ‖ 8 ἔστω — ἄξονος C : om. 𝓛 ‖ 9 δὲ BP Heiberg : ΔΕ BP ms. C autem kr 𝓛 ‖ δὴ Heiberg : δὲ CB ‖ 13 AEI ms. C : ae 𝓛 ‖ ΑΘΔ ms. C : at 𝓛 ‖ 14 AEI, ΑΘΔ ms. 𝓛 : $\overline{\mathrm{AE}}$ $\overline{\mathrm{IA}}$ $\overline{\Theta\Delta}$ ms. C ‖ 15 τμάματα Heiberg : τμήματα C om. 𝓛 ‖ 18 ΥΧ, ΓΝ Heiberg : ΥΚΓΝ ms. C pyq 𝓛 ‖ 19 ΑΘΔ Comm. : ΑΒΔ ms. C aod 𝓛 ‖ 23 ἀπολέλαπται Heiberg : ἀπείληπται C tangentes 𝓛 ‖ 24 ΝΓ, ΝΟ Heiberg : ΠΝ. Γ ὁ ms. C pno 𝓛 ‖ ἁ ΟΓ Heiberg : τῆς ΒΓ ms. C og post lac. 𝓛 ‖ 25 ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἁ Heiberg : om. C ex proportione quam habet quae 𝓛.

au produit[1] du rapport de $I\Lambda$ à ΛA par le rapport de $A\Delta$ à ΔI. Or ΛI est à ΛA comme deux est à cinq ; car le rapport de TB à $B\Delta$ est égal au rapport de deux à cinq, et de même[2] le rapport de EB à BA et le rapport de ΔZ à ΔA, et, d'autre part, ΛI est double[3] de ΔZ, ΛA double de ΔA, et $A\Delta$ est à ΔI comme cinq est à un[4] ; mais le produit du rapport de deux à cinq par le rapport de cinq à un est égal au rapport de deux à un ; il s'ensuit que $O\Gamma$ est double de $\Gamma\Xi$, et pour les mêmes raisons $\Pi\Upsilon$ est aussi double de $\Upsilon\Phi$. Mais comme $\Delta\Sigma$ est égal aux trois demis de KP, il est évident que $B\Sigma$ est l'excès de l'axe sur les trois demis du paramètre[5].

Si maintenant le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est égal au rapport du carré sur $B\Sigma$ au carré sur $B\Delta$, ou supérieur à ce rapport, le segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base ne touche pas le liquide, se dressera droit ; car on a montré plus haut[6] qu'un segment, dont l'axe est supérieur aux trois demis du paramètre, et tel que le rapport de son poids à celui du liquide n'est pas inférieur au rapport du carré de l'excès de l'axe sur les trois demis du paramètre au carré de l'axe, prendra une position droite s'il est abandonné dans le liquide dans les conditions indiquées.

Mais si le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est inférieur au rapport du carré sur ΣB au carré sur $B\Delta$, et supérieur au rapport du carré sur $O\Xi$ au carré sur $B\Delta$, le segment, abandonné dans le

1. Cf. notes complémentaires.
2. Cf. Eucl. VI, 4.
3. Puisque $\Lambda I = A\Lambda - AI = 2(A\Delta - AZ) = 2\Delta Z$.
4. On a en effet $\frac{T\Delta}{\frac{1}{2}B\Delta} = \frac{6}{5} = \frac{EZ}{H\Theta} = \frac{AI}{A\Delta}$.
5. Parce que $\frac{3}{2}KP = \frac{3}{2}BK - \frac{3}{2}BP = 3K\Delta - \frac{3}{2}BP = B\Delta - B\Sigma = \Delta\Sigma$; $B\Sigma = B\Delta - \Delta\Sigma = B\Delta - \frac{3}{2}KP$.
6. Cf. prop. 4.

ΙΛ ποτὶ ΛΑ, καὶ ὃν ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ ΔΙ. Ἔχει δὲ καὶ ἁ ΛΙ ποτὶ ΛΑ ὃν δύο ποτὶ ε̄ · ἅ τε γὰρ ΤΒ ποτὶ ΒΔ ἐστὶν ὡς δύο ποτὶ ε̄, καὶ ἁ ΕΒ ποτὶ ΒΑ καὶ ἁ ΔΖ ποτὶ ΔΑ, τούτων δὲ διπλάσιαι αἱ ΛΙ, ΛΑ · ἁ δὲ ΑΔ ποτὶ ΔΙ ἔχει ὅσον πέντε πρὸς ᾱ, ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὰ δύο ποτὶ τὰ ε̄ καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὰ πέντε ποτὶ τὸ ἓν ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὰ δύο ποτὶ τὸ ᾱ · διπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ΟΓ τᾶς ΓΞ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἁ ΠΥ τᾶς ΥΦ. Ἐπεὶ δέ ἐστιν ἁ ΔΣ ἡμιολία τᾶς ΚΡ, δῆλον ὅτι ἁ ΒΣ ἁ ὑπεροχά ἐστιν, ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος.

Εἰ μὲν οὖν τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΣ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἢ μείζονα τούτου τοῦ λόγου, ἀφεθὲν τὸ τμᾶμα εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, ὀρθὸν κατασταθεῖται · δέδεικται γὰρ πρότερον ὅτι [ἐὰν] τμᾶμα μείζονα ἔχον τὸν ἄξονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ἐὰν τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν μὴ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ τοῦ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν οὕτως ὡς εἴρηται, ὀρθὸν κατασταθεῖται.

Ἐπὴν δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχῃ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΣΒ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, μείζονα δὲ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΟΞ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν

2 ἐστὶν ὡς C : habet proportionem quam sex ad quindecim hoc est quam 𝓛 ‖ 3 καὶ pr. C : et est ut quae cb ad bd ita 𝓛 ‖ 4 διπλάσιαι αἱ Heiberg : διπλῶς αἱ C dadz duplae seq. lac. 𝓛 ‖ 5 ᾱ Heiberg : μίαν C unum 𝓛 ‖ 7 ᾱ · διπλασία ἄρα Heiberg : ΑΔ ms. C unum, duplam autem proportionem habent duo ad unum, dupla ergo 𝓛 ‖ 9 ΔΣ ms. C : bis 𝓛 ‖ ἁ tert. om. C ‖ 10 ἢ 𝓛 : om. C ‖ 16 ἐὰν C𝓛 : del. Heiberg ‖ 18 τὸ τετράγωνον τὸ Heiberg : tetragonum quod 𝓛 ‖ 20 τοῦ Heiberg : τῆς τοῦ C ‖ 21 ὡς 𝓛 : om. C ‖ 23 λόγον 𝓛 : om. C ‖ 25 ΟΞ ms. C : xt 𝓛 ‖ ποτὶ 𝓛 : om. C.

liquide dans une position inclinée telle que sa base ne touche pas le liquide, se placera dans une position inclinée telle que sa base ne touche en aucun point la surface du liquide et que son axe fait avec la surface du liquide un angle supérieur à l'angle de sommet ϟ.

Si le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est égal au rapport du carré sur ΞO au carré sur BΔ, le segment, abandonné dans le liquide dans une position inclinée telle que sa base ne touche pas le liquide, se placera dans une position inclinée telle que sa base touche en un seul point la surface du liquide et que son axe fait avec la surface du liquide un angle égal à l'angle de sommet ϟ.

Si le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est inférieur au rapport du carré sur ΞO au carré sur BΔ, et supérieur au rapport du carré sur ΠΦ au carré sur BΔ, le segment, abandonné dans le liquide en une position inclinée telle que sa base ne touche pas le liquide, se placera avec une inclinaison telle que sa base est coupée par le liquide sur une plus grande étendue.

Si le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est égal au rapport du carré sur ΠΦ au carré sur BΔ, le segment, abandonné dans le liquide en une position inclinée telle que sa base ne touche pas le liquide, se placera avec une inclinaison telle que sa base touche en un seul point la surface du liquide, et que son axe fait un angle égal à l'angle de sommet Ψ.

κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖται κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ᾽ ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ γωνίαν ποιεῖν ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ μείζονα τᾶς ϟ.

Ἐὰν δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν τοῦτον ἔχῃ τὸν λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΟ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖται κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ἅπτεσθαι καθ᾽ ἓν τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ἴσαν τᾷ ϟ.

Ἐὰν δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχῃ τοῦ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΟ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, μείζονα δὲ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΦ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖται κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ κατὰ πλείονα τόπον τέμνεσθαι ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ.

Εἰ δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΦ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖται κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ καθ᾽ ἓν σαμεῖον ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποιεῖν γωνίαν ἴσαν τᾷ Ψ.

1 αὐτοῦ μὴ C : om. ℒ ‖ 3 μηδὲ καθ᾽ ἓν Heiberg : μηδὲν καθ᾽ ἓν C nihil ℒ ‖ 5 ϟ ms. C : m ℒ ‖ 7 ὃν ℒ : om. C ‖ τὸ τετράγωνον C : om. ℒ ‖ 11 ἅπτεσθαι — 20 αὐτοῦ C : om. ℒ ‖ 13 ἴσαν Heiberg : εἴσην C ‖ ϟ Comm. : H ms. C ‖ 20 τέμνεσθαι C : humectetur ℒ ‖ 22 τῷ ℒ : πρὸς τούτῳ C ‖ 25 μὴ ℒ : καθ᾽ ἓν σημεῖον C ‖ 27 τᾶς Heiberg : om. C ‖ 28 ποιεῖν ℒ : ποιεῖ C.

Si le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est inférieur au rapport du carré sur ΠΦ au carré sur ΒΔ, le segment, abandonné dans le liquide en une position inclinée telle que sa base ne touche pas le liquide, se placera avec une inclinaison telle que son axe fait avec la surface du liquide un angle inférieur à l'angle de sommet Ψ, et que sa base ne touche la surface du liquide en aucun point.

Ces propositions seront démontrées l'une après l'autre.

Que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide soit donc d'abord supérieur au rapport du carré sur ΞΟ au carré sur ΒΔ, et inférieur[1] au rapport du carré de l'excès de l'axe sur les trois demis du paramètre au carré de ΒΔ ; supposons présente la figure construite plus haut[2] ; que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide soit égal au rapport du carré sur le segment Ψ au carré sur ΒΔ ; le segment Ψ est donc supérieur à ΞΟ et inférieur à l'excès de

Fig. 107

1. Ce qui est possible par ce que $\Sigma B = \frac{3}{2}$ ΒΡ, $\Xi O = \frac{3}{2}$ ΓΟ, et ΒΡ > ΓΟ.

2. Dans cette même prop. II, 10.

Ἐὰν δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει πρὸς τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ τοῦ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΦ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖται κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὸν μὲν ἄξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ἐλάσσονα τᾶς Ψ, τὰν δὲ βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

Δειχθήσεται δὲ ταῦτα ἑξῆς.

Ἐχέτω δὴ πρῶτον τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν μείζονα μὲν λόγον τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΟ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἐλάσσονα δὲ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς τετράγωνον, ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τετράγωνον, καὶ ὑποκείσθω τὸ πρότερον κατεσκευασμένον σχῆμα, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἐχέτω τὸ ἀπὸ τᾶς Ψ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ· ἔστι δὴ ἁ Ψ τᾶς μὲν ΞΟ μείζων, ἐλάσσων δὲ τᾶς ὑπεροχᾶς,

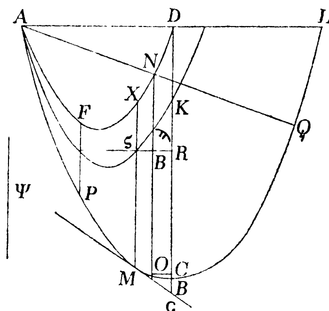


Fig. 107

7 αὐτοῦ 𝔛 : τοῦ C ‖ 11 ΞΟ ms. 𝔛 : ΞΠ ms. C ‖ 13 ἢ om. C ‖ 16 δὲ λόγον 𝔛 : δῆλον C ‖ 17 ἐχέτω om. 𝔛 ‖ 18 ΞΟ ms. 𝔛 : ΞΠ ms. C.

l'axe sur les trois demis du paramètre. Plaçons entre les sections coniques ΑΠΟΛ et ΑΞΔ un segment de droite NO, égal à Ψ, qui coupe la conique restante en ϡ et la droite Rϛ en B′ ; on démontrera que Oϡ est double de ϡN comme on a démontré que Mϛ est double de ϛX. Menons de O la tangente Oϟ à la parabole APOL et la perpendiculaire OC à BD, et joignons A et N par la droite AN. Or AN et QN seront égaux entre eux. Du moment, en effet, que dans les segments semblables APOL et AXD les droites AN et AQ ont été menées aux (sc. paraboles limitant les) sections et qu'elles font des angles égaux avec les bases, QA et AN auront le même rapport[1] avec LA et AD d'après la seconde figure ; AN est donc égal à QN et parallèle à Oϟ ; il faut démontrer que le segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base ne touche le liquide en aucun point, prendra une position inclinée telle que sa base ne touche en aucun point la surface du liquide, et que son axe fait avec la surface du liquide un angle aigu supérieur à l'angle ϟ.

Que le segment soit abandonné dans le liquide et s'y place de manière que sa base touche la surface du liquide en un seul point ; que l'intersection du segment avec un plan passant par son axe et perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole APOL ; soit OA la trace du plan sécant dans la surface du liquide, et

1. La première figure de la proposition montre qu'on a $\frac{LN}{NA} = \frac{NO}{Oc}$ et, d'après Eucl. V, 18, $\frac{LA}{NA} = \frac{Nc}{Oc}$, et, de même, $\frac{DA}{NA} = \frac{Nc}{Xc}$, d'où, d'après Eucl. V, 7, coroll. et V, 22, $\frac{LA}{AD} = \frac{Xc}{Oc}$; pour les mêmes raisons, $\frac{QX}{XA} = \frac{XO}{Oc}$ ou, d'après Eucl. V, 18, $\frac{QA}{XA} = \frac{Xc}{Oc}$, ce qui correspond, sur la seconde figure, à $\frac{LA}{AD} = \frac{QA}{NA}$.

ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. Ἐναρμόσθω δέ τις μεταξὺ τῶν ΑΠΟΛ, ΑΞΔ κώνων ⟨τομᾶν⟩, quae NO aequalis ipsi Ψ, et secet ipsa reliquam coni sectionem penes ϡ, ipsam autem Rς rectam penes B′ ; demonstrabitur autem quae Oϡ dupla ipsius ϡN, sicut demonstrata est quae Mς ipsius ςX dupla, ab O autem ducatur quae Oϟ contingens sectionem APOL, quae autem OC perpendicularis super BD, et ab A ad N copuletur ; erunt autem quae AN, QN aequales inuicem. Quoniam enim in similibus portionibus APOL, AXD productae sunt a basibus ad portiones quae AN, AQ aequales angulos facientes ad bases, eandem proportionem habebunt quae QA, AN cum ipsis LA, AD propter secundam figuram praescriptarum ; aequalis ergo quae AN ipsi QN, et aequedistans ipsi Oϟ. Demonstrandum, quod dimissa in humidum ita, ut basis ipsius non secundum unum tangat <humidum, ita inclinata consistet, ut basis eius in nullo puncto superficiem humidi tangat, et> axis ad superficiem humidi angulum acutum faciat maiorem angulo ϟ.

Dimittatur enim et consistat ita, ut basis ipsius tangat secundum unum signum superficiem humidi, secta autem portione per axem plano recto ad superficiem humidi superficiei quidem portionis sectio sit quae APOL rectanguli coni sectio, superficiei autem humidi quae OA, axis autem [sectionis] et diameter

2 ΑΞΔ ms. C : azd ℒ ‖ <τομᾶν> Heiberg ‖ 4 Rς Heiberg : rϟ ℒ ‖ 6 Mς Heiberg : pς ℒ ‖ 11 portionibus ℒ : sectionibus Nizzius ‖ 12 portiones ℒ : sectiones Nizzius ‖ 16 Oϟ Heiberg : oς ℒ ‖ 18 <humidum — 20 tangat et> suppl. Comm. : om. ℒ. ‖ 18 inclinata scripsi : inclinatum Comm. ‖ 21 angulo ϟ Heiberg : excessu ℒ ‖ 27 sectionis del. Heiberg.

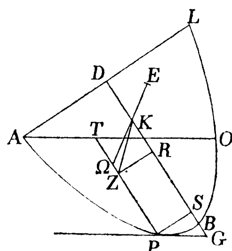


Fig. 108

BD l'axe et le diamètre de la parabole ; coupons BD par les points K et R comme il a été indiqué[1] et menons la droite PG, parallèle à OA et tangente à la parabole APOL au point P ; menons la parallèle PT à BD et la perpendiculaire PS à BD. Du moment donc que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est égal au rapport du carré sur Ψ au carré sur BD, que le rapport (sc. du poids) du segment au (sc. poids du) liquide est égal au rapport de la partie immergée du segment au segment entier[2], et que, enfin, le rapport de la partie immergée au segment entier est égal[3] au rapport du carré sur TP au carré sur DB, le segment de droite Ψ sera égal à TP. D'autre part, NO est égal à TP ; il s'ensuit que les segments APQ et APO sont à leur tour égaux entre eux[3]. Mais comme on a mené, dans les segments égaux et semblables APOL et AMQL, les droites OA et AQ à partir des extrémités des bases, et que les (sc. bases des) segments découpés font avec les diamètres des angles égaux, d'après les indications de la troisième figure, les angles de sommets ϛ et G sont égaux, ainsi que les segments de droite ϛB et GB ; sont donc aussi égaux entre eux SR et CR,

1. C'est-à-dire de manière que BK = 2KD, et que $\frac{BD}{KR} = \frac{15}{4}$; cf. le début de cette proposition.

2. Cf. prop. II, 1.

3. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 24.

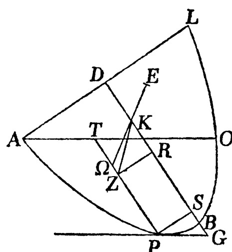


Fig. 108

quae BD, et secetur quae BD penes K, R, ut dictum est. Ducatur autem et quae quidem PG aequedistanter ipsi AO recta contingens sectionem APOL secundum P, quae autem PT aequedistanter ipsi BD, quae autem PS perpendicularis super BD, quoniam igitur portio ad humidum in grauitate proportionem habet quam tetragonum quod a Ψ ad id quod a BD, quam autem proportionem habet portio ad humidum, hanc habet demersa ipsius portio ad totam, quam autem demersa ad totam, tetragonum quod a TP ad id quod a DB, erit quae Ψ ipsi TP aequalis. Et quae NO ergo ipsi TP aequalis est ; quare et portiones APQ, APO inuicem sunt aequales. Quoniam autem in portionibus aequalibus et similibus APOL, AMQL ab extremitatibus basium productae sunt quae OA, AQ, et portiones ablatae faciunt ad diametros angulos aequales propter tertiam figuram praescriptarum, quare anguli qui apud ϛ, G sunt aequales, et quae ϛB, GB, ergo aequales sunt ; quare

13 APO Comm. : apf 𝔛 || 15 AMQL Comm. : ablk 𝔛 || 16 OA Heiberg : ao Comm. ta 𝔛 || 18 ϛ Heiberg : Y ms. 𝔛 || 19 ϛB Heiberg : gb 𝔛.

PZ et OB′, ZT et B′N. Puisque OB′ est inférieur[1] au double de B′N, il est évident que PZ est inférieur au double de ZT. Soit donc PΩ double de ΩT ; joignons K à Ω et menons la droite KΩ jusqu'à E ; le segment entier aura donc pour centre de gravité le point K, la partie du segment immergée le point[2] Ω, et la partie qui émerge aura son centre de gravité sur KE ; soit E ce centre[3]. Mais KZ sera perpendiculaire à la surface du liquide[4] ; il en sera donc de même des parallèles à KZ menées par les points E et Ω. Le segment ne restera, par conséquent, pas en place, mais prendra une position inclinée telle que sa base ne touche plus la surface du liquide en aucun point, puisqu'il est incliné maintenant ayant contact (sc. avec la surface du liquide) en un point ; il est donc évident que le segment prendra une position telle que son axe fera avec la surface du liquide un angle supérieur à l'angle de sommet ϟ.

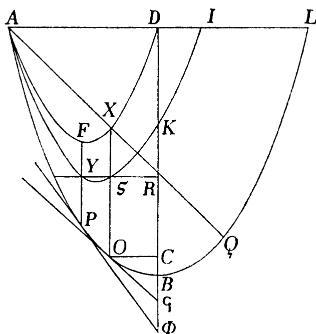


Fig. 109

Que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide soit maintenant égal au rapport du carré sur

1. Parce que Oϡ = 2ϡN.
2. Cf. prop. II, 2.
3. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.
4. Cf. prop. II, 4.

et quae SR, CR et quae PZ, OB′ et quae ZT, B′N. Quoniam minor est quam dupla quae OB′ ipsius B′N, palam quod quae PZ ipsius ZT est minor quam dupla. Sit igitur quae PΩ ipsius ΩT dupla, et copulata quae KΩ educatur ad E ; totius quidem igitur centrum grauitatis erit K, eius autem portionis quae intra humidum centrum Ω, eius autem quae extra in linea KE ; et sit E. Quae autem KZ perpendicularis erit super superficiem humidi ; quare et quae per signa E, Ω aequidistanter ipsi KZ. Non ergo manet portio, sed reclinabitur, ut basis ipsius nec secundum unum tangat superficiem humidi, quoniam nunc secundum unum tacta ipsa reclinatur ; manifestum igitur quod portio consistet ita, ut axis ad superficiem humidi faciat angulum maiorem angulo ϥ.

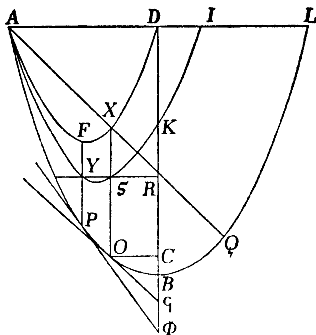


Fig. 109

Habeat autem portio ad humidum in grauitate hanc proportionem, quam habet tetragonum quod

1 OB′ Heiberg : oϛ ℒ ‖ B′N Heiberg : ϥknℒ ‖ 2 OB′ Heiberg : oϡ′ϛ ℒ ‖ 3 B′N Heiberg : ϛϡ nℒ ‖ 16 ϥ Heiberg : yℒ.

XO au carré sur BD ; que le segment soit abandonné dans le liquide avec l'inclinaison indiquée[1]. Que son intersection avec un plan passant par son axe et perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole APOL ; soit OI la trace du plan sécant dans la surface du liquide, BD l'axe du segment et le diamètre de la parabole ; coupons BD comme plus haut[2] ; menons la droite PN, parallèle à IO et tangente à la parabole en P, la droite PT parallèlement à BD, et la perpendiculaire PS à BD. Il faut démontrer que le segment ne gardera pas l'inclinaison indiquée, mais qu'il s'inclinera jusqu'à ce que sa base touche la surface du liquide en un seul point.

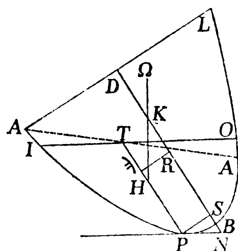


Fig. 110

Considérons les figures antérieures et les constructions de la figure tracée plus haut[3] ; menons la perpendiculaire CO à BD, joignons A à X et prolongeons AX jusqu'au point Q ; AX sera égal à XQ ; menons la parallèle Oϟ à AQ. Du moment que par hypothèse le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est égal au rapport du carré sur XO au carré sur BD, et que ce dernier rapport est aussi celui de la partie immergée

1. C'est-à-dire que la base ne touche la surface du liquide en aucun point.
2. Cf. le début de cette proposition.
3. Cf. la première figure dans le texte latin de cette prop.

ab XO ad id quod a BD, et dimittatur in humidum ita inclinata. Secta autem ipsa per axem plano recto ad superficiem humidi solidi quidem sectio sit quae APOL rectanguli coni sectio, superficiei autem humidi quae OI, axis autem portionis et diameter sectionis quae BD, et secetur quae BD ut prius, et ducatur quae quidem PN aequedistanter ipsi IO contingens sectionem secundum P, quae autem PT aequedistanter ipsi BD, quae autem PS perpendicularis super BD. Demonstrandum quod portio non manet inclinata sic, sed inclinatur, donec utique basis secundum unum signum tangat superficiem humidi.

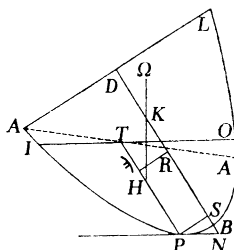


Fig. 110

Praeiaceant autem et quae in superiori figura prius disposita sunt, et quae CO perpendicularis ducatur super BD, et quae AX copulata educatur ad Q ; erit autem quae AX ipsi XQ aequalis ; et ducatur ipsi AQ quae Oϟ aequedistans. Et quoniam supponitur portio ad humidum in grauitate hanc habere proportionem, quam habet tetragonum quod ab XO ad id quod a BD, habet autem hanc proportionem et

17 Oϟ Heiberg : oy 𝔛 || 19 XO Comm. : xa𝔛.

du segment au segment entier[1], c'est-à-dire celui[2] du carré sur TP au carré sur BD, PT sera égal à XO, et comme dans les segments IBO et ABQ les diamètres sont égaux, ces segments sont égaux[2]. D'autre part, comme on a mené dans les segments égaux et semblables APOL et AOQL les droites AQ et IO, qui découpent des segments égaux, l'une d'une extrémité de la base, l'autre non d'une extrémité, il est évident que celle qui est menée de l'extrémité de la base fait avec le diamètre du segment entier un angle aigu plus petit ; et comme l'angle de sommet ϛ est inférieur à l'angle de sommet N, BC est supérieur à BS, et CR est inférieur[3] à RS ; il s'ensuit que Oϛ est inférieur à Pϡ, et ϛX supérieur à ϡT. Comme, d'autre part, Oϛ est double de ϛX, il est évident que Pϡ est supérieur au double de ϡT. Soit donc PH double de HT ; joignons H à K et prolongeons la droite HK jusqu'à Ω. Dès lors, le segment entier aura pour centre de gravité le point K, la partie du segment immergée dans le liquide le point[4] H, et la partie qui émerge du liquide aura son centre de gravité sur[5] KΩ ; soit Ω ce centre. On démontrera comme précédemment[6] que la droite Kϡ et les parallèles à Kϡ menées par les points H et Ω sont perpendiculaires à la surface du liquide. Il est donc évident que le segment ne restera pas en place, mais s'inclinera jusqu'à ce que sa base touche la surface du liquide en un seul point — comme nous allons le démontrer sur la troisième figure[7], telle qu'elle est tracée dans le troisième cas[8] de la proposition —, et que le segment gardera cette position.

1. Cf. prop. II, 1.
2. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 24.
3. On a en effet : BC = Bϛ, et BS = BN, d'après *Quadr. parab.*, 2 ; si l'angle de sommet ϛ est égal à l'angle de sommet N, Bϛ est égal à BN, et si l'angle ϛ diminue, Bϛ augmente, de façon que l'inégalité ϛ < N entraîne l'inégalité Bϛ > BN, d'où BC > BS ; de plus, CR = BR — BC ; RS = BR — BS.
4. Cf. prop. II, 2.
5. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.
6-8. Cf. notes complémentaires.

demersa portio ad totam, hoc est quod a TP ad id quod a BD, aequalis utique erit quae PT ipsi XO. Et quoniam portionum IBO, ABQ diametri sunt aequales, et portiones. Rursum quoniam in portionibus aequalibus et similibus APOL, AOQL productae sunt AQ, IO aequales portiones auferentes, hoc quidem ab extremitate basis, hoc autem non ab extremitate, palam quod minorem facit acutum angulum ad diametrum totius portionis, quae ab extremitate basis producta est. Et quoniam angulus qui apud ϛ est minor quam qui apud N, maior est quae BC quam BS, quae autem CR minor quam RS ; quare et quae Oϛ minor quam Pϡ, <et ϛX> maior est quam ϡT. Et quoniam quae Oϛ dupla est ipsius ϛX, palam quod quae Pϡ maior est quam dupla ipsius ϡT. Sit igitur quae PH dupla ipsius HT.

Καὶ ἐπεζεύχθω ἁ HK καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ω. Ἐσσεῖται δὴ τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ K, τοῦ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ H, τοῦ δ' ἐκτὸς ἐπὶ τᾶς KΩ · ἔστω τὸ Ω. Δειχθήσεται δὴ ὁμοίως ἅ τε Kϡ κάθετος ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν καὶ αἱ διὰ τῶν H, Ω σαμείων παρὰ τὰν Kϡ. Δῆλον οὖν ὅτι οὐ μενεῖ τὸ τμᾶμα, ἀλλ' ἐπικλιθήσεται, ἕως ἂν ἁ βάσις αὐτοῦ ἅπτηται καθ' ἓν σαμεῖον τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καθάπερ demonstrabitur in tertia figura, quomodo se habet in tertio theoremate, et manebit portio ita consistens.

11 ϛ Heiberg : y 𝔏 ‖ quam Comm. : om. 𝔏 ‖ N Comm. : h 𝔏 ‖ 13 Oϛ Heiberg : oy 𝔏 ‖ Pϡ, <et ϛX> Heiberg : pn (lac. 4 litt.) μξτησϡH ms. 𝔏 ‖ 14 ϡT Heiberg : dupla 𝔏 ‖ Oϛ Heiberg : oy 𝔏 ‖ 16 lac. 2 lin. ‖ 20 Kϡ Heiberg : KT ms. C kϡ 𝔏 ‖ 21 αἱ Heiberg : quae 𝔏 om. C ‖ 22 μενεῖ Heiberg : manebit 𝔏 μένει C ‖ 23 ἅπτηται Heiberg : tangat 𝔏 ἅπτεται C ‖ 24 post καθάπερ lac. 3 lin. in C.

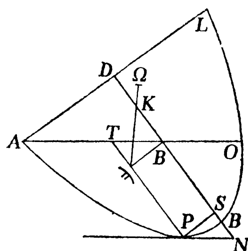


Fig. 111

On aura, en effet, mené, dans les segments égaux APOL et AOQL, des extrémités des bases, les droites AQ et AO découpant des segments égaux ; car on démontrera comme plus haut que ces segments APQ et APO sont égaux ; les droites AO et AQ feront donc avec les diamètres des segments des angles aigus égaux, puisque les angles de sommets N et ϙ sont égaux[1]. Soit Pϡ double de ϡT ; les points ϡ et K étant joints et la droite ϡK prolongée jusqu'à Ω, le segment entier aura pour centre de gravité le point K, la partie immergée dans le liquide le point[2] ϡ, et le centre de gravité de la partie qui émerge sera situé sur KΩ ; soit Ω ce centre[3]. Or Kϡ est perpendiculaire à la surface du liquide[4]. C'est donc suivant les mêmes droites que la partie immergée montera et que la partie qui émerge du liquide descendra ; le segment restera donc en place, sa base touchera la surface du liquide

1. Cf. Eucl. I, 29.
2. Cf. prop. II, 2.
3. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.
4. Cf. prop. II, 4.

Fig. 111

In portionibus enim aequalibus APOL, AOQL productae erunt ab extremitatibus basium quae AQ, AO aequales <portiones> auferentes ; demonstrabitur enim APQ aequalis ipsi APO similiter prioribus ; aequales igitur facient acutos angulos quae AO, AQ ad diametros portionum, quoniam aequales sunt qui apud N, ϟ anguli. Et <sit Pϡ dupla ipsius> ϡT ; copulata autem ipsa ϡK et educta ad Ω erit totius quidem portionis centrum grauitatis K, eius autem quae intra humidum ϡ, eius autem quae extra in linea KΩ ; et sit Ω. Et quae Kϡ ⟨κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ⟩ ἐπιφάνειαν. Κατὰ τὰς αὐτὰς οὖν εὐθείας τό τε ἐν τῷ ὑγρῷ ἀνενεχθήσεται καὶ τὸ ⟨ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ⟩ κατενεχθήσεται · μενεῖ ⟨δὴ τὸ τμᾶμα, καὶ⟩ ἅ τε ⟨βάσις καθ' ἓν σαμεῖον ἅψεται τᾶς τοῦ⟩ ὑγροῦ

3 <portiones> Heiberg : om. 𝒞 ‖ 7 ϟ Heiberg : y 𝒞 ‖ <sit Pϡ dupla ipsius> Heiberg : om. 𝒞 ‖ 10 ϡ Heiberg : h' 𝒞 ‖ 11 Kϡ Heiberg : kh 𝒞 ‖ 12 <κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ> Heiberg : perpendicularis est super superficiem humidi 𝒞 linea legi nequit in C ‖ 13 τό τε — 14 <ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ> Heiberg : quod quidem in humido sursum feretur et quod extra humidum 𝒞 ‖ 14-15 μενεῖ <δὴ τὸ τμᾶμα, καὶ> Heiberg : manebit autem portio et 𝒞 ‖ 15 <βάσις — τοῦ> Heiberg : basis et magnitudo et secundum unum signum tanget 𝒞.

en un seul point, et son axe fera avec la surface du liquide un angle égal à l'angle indiqué plus haut.

Que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide soit maintenant inférieur au rapport du carré sur NT[1] au carré sur BD, mais que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide soit égal au rapport du carré sur le segment Ψ au carré sur BD ; or le segment de droite Ψ est inférieur à TN. Intercalons donc de nouveau entre les segments AMD et APOL un segment de droite PI mené parallèlement à BD et égal à Ψ ; que PI coupe la parabole intermédiaire au point Υ, et la droite XR au point H. On démontrera dès lors que ΠΥ est double de ΥI, comme on a démontré[2] que ΓO est double de ΓX. Menons aussi la droite ΠΩ, tangente à la parabole AΠOΛ au point Π, et la perpendiculaire ΠE à BΔ, joignons I à A et prolongeons la droite IA jusqu'au point X ; la droite AI sera égale à IX, et la droite AX parallèle à ΠΩ. Il faut donc démontrer que le segment, abandonné dans le liquide avec une inclinaison telle que sa base ne touche pas le liquide, prendra une position inclinée telle que son axe fera avec la surface du liquide un angle inférieur à l'angle de sommet[3] Φ, et que sa base ne touche la surface du liquide en aucun point.

1. Sc. NT sur la figure qui suit, mais PF (ΠΦ dans le texte grec) sur la première figure de cette proposition II, 10.

2. Cf. plus haut dans cette proposition II, 10.

3. De sommet Ψ sur la première figure de cette proposition.

ἐπιφανείας, καὶ ὁ ἄξων ⟨τοῦ τμάματος⟩ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ποιήσει γωνίαν ἴσαν τᾷ προγεγραμμένᾳ.

Habeat etiam rursum portio ad humidum in grauitate proportionem minorem ea, quam habet tetragonum quod ab NT ad id quod a BD, quam autem proportionem habet portio ad humidum in grauitate, hanc habeat tetragonum quod a Ψ <ad tetragonum quod a BD> ; minor autem est quae Ψ quam TN. Rursum igitur inaptetur quaedam intermedia portionum AMD, APOL quae PI aequedistanter ipsi BD producta aequalis ipsi Ψ, secet autem ipsa intermediam coni sectionem penes Y, ipsam autem XR εὐθεῖαν κατὰ τὸ Η. Δειχθήσεται δὴ ἁ ΠΥ διπλασία τᾶς ΥΙ, καθάπερ ἐδείχθη καὶ ἁ ΓΟ τᾶς ΓΧ. Ἄχθω δὲ καὶ ἁ μὲν ΠΩ ἐφαπτομένα τᾶς ΑΠΟΛ κατὰ τὸ Π, ἁ δὲ ΠΕ κάθετος ἐπὶ τὰν ΒΔ, καὶ ἁ ΙΑ ἐπιζευχθεῖσα ⟨ἐκβεβλήσθω⟩ ἐπὶ τὸ Χ· ἐσσεῖται δὲ ἁ ΑΙ τᾷ ΙΧ ἴσα καὶ ἁ ΑΧ τᾷ ΠΩ παράλληλος. Δεικτέον δὴ ὅτι τὸ τμᾶμα ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, οὕτως καταστασεῖται κεκλιμένον, ὥστε τὸν ἄξονα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ⟨ἐλάσσονα τᾶς Φ, τὰν δὲ βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

1 καὶ ὁ ἄξων <τοῦ τμάματος> Heiberg : et axis portionis 𝔊 ‖ 3 — p. 61, 28 hoc loco, sed ex parte solum legi potest; post p. 66, 10 collocat 𝔊 ‖ 5 NT Heiberg : no 𝔊 ‖ 7-8 <ad tetragonum quod a BD> Comm. : om. 𝔊 ‖ 9 TN Heiberg : on 𝔊 ‖ 13 δὴ Heiberg : δὲ C autem 𝔊 ‖ διπλασία Heiberg : διπλῆ C ‖ 14 ΓΧ Comm. : ΓΝ ms C gh 𝔊 ‖ 16 ΙΑ Heiberg : ·Δ̄ ms. C ai 𝔊 ‖ <ἐκβεβλήσθω> Heiberg : ducatur 𝔊 om. C ‖ 17 δὲ — 18 δεικτέον Heiberg : uestigia solum in C autem quae ai ipsi iq aequalis et quae aq ipsi pq aeque distans demonstrandum est 𝔊 ‖ 18 ὅτι Heiberg : quod 𝔊 ἐστὶν C ‖ 22 <ἐλάσσονα — 2 p. 60 βάσιν> (5 lineae legi nequeunt in C) Heiberg : minorem angulo f, basis autem ipsius neque secundum unum tangat superficiem humidi, dimittatur enim in humidum et consistat ita ut basis 𝔊.

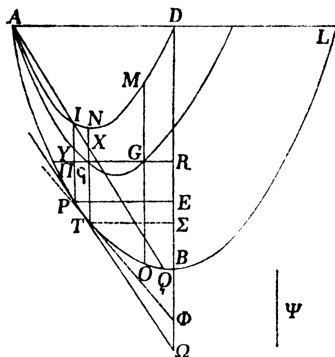


Fig. 112

Que le segment soit abandonné dans le liquide et s'y place de manière que sa base touche la surface du liquide en un seul point ; que son intersection avec un plan passant par son axe et perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole AHBΛ[1] ; soit AZ la trace du plan sécant dans la surface du liquide, BΔ l'axe et le diamètre de la parabole ; coupons BΔ par les points K et P comme nous l'avons fait plus haut[2], menons la droite HI, parallèle à AZ et tangente à la

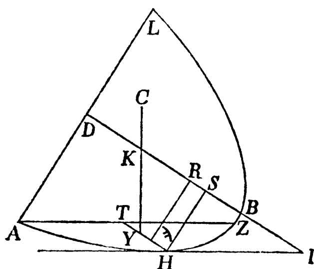


Fig. 113

1. Cf. la figure suivante.

2. C'est-à-dire de manière que $BK = 2K\Delta$ et $\frac{B\Delta}{KP} = \frac{15}{4}$.

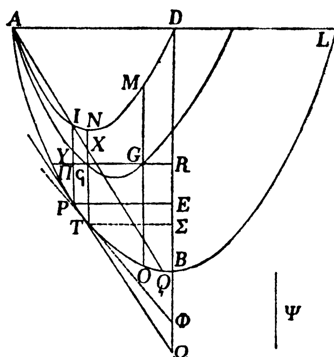


Fig. 112

Ἀφείσθω γὰρ εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ καθεστακέτω οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν⟩ αὐτοῦ καθ' ἓν σαμεῖον ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, τμαθέντος δὲ τοῦ τμάματος ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν διὰ τοῦ ἄξονος τομὰ ἔστω τᾶς μὲν τοῦ τμάματος ἐπιφανείας ἁ ΑΗΒΛ ὀρθογωνίου κώνου τομά, τᾶς δὲ τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας ἁ ΑΖ, ἄξων δὲ καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΒΔ, καὶ τετμάσθω ἁ ΒΔ κατὰ τὰ Κ, Ρ ὁμοίως

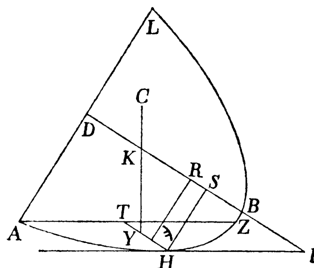


Fig. 113

4 διὰ τοῦ ἄξονος om. ℒ || 5 ΑΗΒΛ Heiberg : ΑΘΗΛ ms. C ahbl ℒ.

parabole au point H, la droite HT parallèle à BD, et la droite HS perpendiculaire à BD. Du moment que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est égal au rapport du carré sur Ψ au carré sur BD, et que le rapport entre le poids du segment au poids du liquide est égal au rapport du carré sur HT au carré sur BD pour les mêmes raisons que plus haut[1], il est évident que HT est égal[2] à Ψ ; il s'ensuit que les segments AHZ et APQ sont à leur tour égaux[3]. Puisque, d'autre part, on a mené, dans les segments égaux et semblables APOL et AHZL, à partir des extrémités des bases les droites AQ et AZ qui découpent des segments égaux, il est évident que ces droites font des angles égaux avec les diamètres des segments. Mais aussi dans les triangles HIS et PΩE les angles de sommets I et Ω sont égaux ; il s'ensuit que les segments de droite SB et EB seront aussi égaux ; seront donc égaux entre eux aussi SR et ER, Hϡ et PH, ϡT et HI. Comme, d'autre part, PY est double de ϒI, il est évident que Hϡ est inférieur[4] au double de ϡT. Soit donc HY double de ϒT ; joignons les points Y, K et C et prolongeons la droite YKC ; le centre de gravité du segment entier est le point K, celui de la partie immergée dans le liquide[5] le point ϒ, et le centre de gravité de la partie qui émerge du liquide est situé sur la droite KC ; soit C ce centre[6]. En vertu de la proposition qui précède, il est manifeste que le segment ne reste pas en place, mais prendra une inclinaison telle que sa base ne touche la surface du liquide en aucun point.

Nous allons démontrer maintenant que la position prise par le segment sera telle que son axe fera avec la surface du liquide un angle inférieur à l'angle de

1. Cf. prop. II, 1.
2. Cf. Eucl. V, 9.
3. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 24.
4. On a, en effet, $PH < 2HI$; PH = Hϡ ; HI = ϡT.
5. Cf. prop. II, 2.
6. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.

superioribus, ducatur autem et quae HI aequedistanter ipsi AZ contingens sectionem coni penes H, quae autem HT aequedistanter ipsi BD, quae autem HS perpendicularis super BD. Quoniam igitur portio ad humidum in grauitate hanc habet proportionem, quam habet tetragonum quod a Ψ ad id quod a BD, quam autem proportionem habet portio ad humidum in grauitate, hanc habet tetragonum quod ab HT ad id quod a BD propter eadem prioribus, palam quod quae HT est aequalis ipsi Ψ ; quare et portiones AHZ, APQ sunt aequales. Et quoniam in portionibus aequalibus et similibus APOL, AHZL ab extremitatibus basium sunt productae quae AQ, AZ aequales portiones auferentes, palam quod aequales faciunt angulos ad diametros portionum. Adhuc autem et trigonorum HIS, PΩE aequales sunt anguli qui apud I, Ω ; erunt <igitur> et SB, EB aequales ; quare et quae SR, ER aequales et quae Hϡ, PH et quae ϡT, HI. Et quoniam est dupla quae PY ipsius YI, manifestum quod minor est quam dupla quae Hϡ ipsius ϡT. Sit igitur quae HY dupla ipsius YT, et copulata protrahatur quae YKC ; sunt autem centra grauitatum totius quidem K, eius autem quod intra humidum Y, eius autem quod extra in linea KC ; et sit C. Erit autem propter praecedens theorema hoc manifestum quod non manet portio, sed inclinabitur ita, ut basis ipsius nec secundum unum tangat superficiem humidi.

Quod autem consistet ita, ut axis ipsius ad superficiem humidi faciat angulum minorem angulo Φ

11 AHZ Comm. : amz ℒ ‖ 12 AHZL Comm. : akhl ℒ ‖ 17 <igitur> Heiberg ‖ 19 Hϡ, PH Heiberg : hn, yh ℒ ‖ 21 HΥ Comm. : nyℒ.

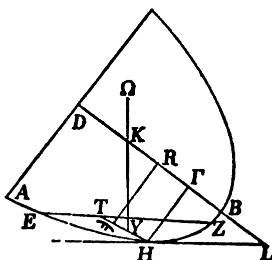


Fig. 114

sommet Φ. Qu'il se place en effet, si possible, de manière que l'axe fasse (sc. avec la surface du liquide) un angle non inférieur à l'angle de sommet Φ ; pour le reste, mêmes constructions que sur la troisième figure[1]. On démontrera dès lors de la même manière que ΘH est égal à Ψϒ, et, par conséquent, aussi égal à IΠ. Du moment donc que l'angle de sommet Λ n'est pas inférieur à l'angle de sommet Φ, ΓB n'est pas supérieur[2] à ΣB, ΓP n'est pas inférieur à ΣP, ni Hϡ inférieur à Θϛ. Puisque, en outre, IΠ est égal aux trois demis de Πϒ que Πϒ est inférieur à Θϛ, HΘ égal à ΠI, et Hϡ non inférieur à Θϛ, ϡH sera supérieur à Πϒ, d'où il résulte que Hϡ est supérieur[3] au double de ϡΘ. Soit donc Hϒ double de ϒΘ ; joignons ϒ à K et prolongeons la droite ϒK ; il est, dès lors, évident comme précédemment que le segment ne restera pas dans sa position, mais s'inclinera de manière que son axe fera avec la surface du liquide un angle inférieur à l'angle de sommet Φ.

1. Sc. dans cette proposition II, 10.

2. Si l'angle Λ est égal à l'angle Φ, ΓB = ΣB, et si l'angle Λ croît, ΛB décroît, et avec ΛB décroît ΓB, égal à ΛB ; cf. *Quadr. parab.*, 2.

3. Puisque $H\text{ϡ} > \Pi Y = \frac{2}{3}\,\Pi I = \frac{2}{3}\,H\Theta$.

Fig. 114

demonstrabitur. Consistat enim, si possibile est, ita, ut faciat angulum non minorem angulo Φ, et alia ⟨κατε-⟩ σκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῷ τρίτῳ σχήματι. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ἁ ΘΗ ἴσα τᾷ Ψ· ὥστε καὶ τᾷ ΙΠ ἴσα. Ἐπεὶ οὖν ἁ Λ γωνία οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς Φ, οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἁ ΓΒ τᾶς ΣΒ, οὐδὲ ἁ ΓΡ ἐλάσσων τᾶς ΣΡ οὐδὲ ἁ Ηϡ τᾶς ΘϘ. Καὶ ἐπειδὴ ἁ ΙΠ ἡμιολία ἐστὶ τᾶς ΠΥ, ἐλάσσων δὲ ἁ ΠΥ τᾶς ΘϘ, καὶ ἁ μὲν ΗΘ ἴσα τᾷ ΠΙ, ἁ δὲ Ηϡ οὐκ ἐλάσσων τᾶς ΘϘ, μείζων ἔσται ἁ ϡΗ τᾶς ΠΥ· ἁ ἄρα Ηϡ μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία τᾶς ϡΘ. Ἔστω δὴ ἁ ΗΥ διπλασία τᾶς ΥΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ ΥΚ ἐκβεβλήσθω· δῆλον δὴ ὁμοίως τοῖς πρότερον ὅτι οὐ μενεῖ τὸ τμᾶμα, ἀλλὰ κλιθήσεται, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν ⟨τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ἐλάσσονα τᾶς Φ⟩.

3 <κατε> Heiberg ‖ 4 δὴ Heiberg : δὲ C𝔚 ‖ 5 ΘΗ ms. C : tm 𝔚 ‖ ΙΠ ms. C : ih 𝔚 ‖ ἴσα om. 𝔚 ‖ 6 ἁ Λ γωνία οὐκ C : hl𝔚 ‖ 7 ΓΡ ms. C : Ϙr 𝔚 ‖ ἐλάσσων Comm. : om. C𝔚 ‖ τᾶς alt. 𝔚 : τηι C ‖ 8 ΘϘ Heiberg : ΘΓ ms. C og 𝔚 ‖ ΙΠ ms. C : ih 𝔚 ‖ ΠΥ ms. 𝔚 : τϘ ms. C ‖ 9 ΘϘ ms. C : go 𝔚 ‖ ΗΘ ms. C : ht 𝔚 ‖ ἴσα Heiberg : ἴση C aequalis est 𝔚 ‖ ΠΙ Heiberg : ΗΙ ms. C pc 𝔚 ‖ 10 ΘϘ Heiberg : Γ ms. C og 𝔚 ‖ ἔσται C : ergo 𝔚 ‖ 13-14 κλιθήσεται Heiberg : κλήθησεται C uoluetur 𝔚 ‖ 14 <τοῦ — 15 τᾶς Φ> Heiberg : legi non potest in C humidi faciat angulum minorem angulo f 𝔚.

De la même manière on démontrera que, si le rapport entre le poids d'un segment et celui du liquide est égal au rapport du carré sur NT au carré sur BD, ce segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base ne touche pas la surface du liquide, prendra une position inclinée telle que sa base touchera la surface du liquide en un seul point, et que son axe fera avec la surface du liquide un angle égal à l'angle de sommet Φ.

Que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide soit donc de nouveau supérieur[1] au rapport du carré sur ΖΠ au carré sur ΒΔ, et inférieur au rapport du carré sur ΞΟ au carré sur ΒΔ, et que le rapport entre le poids du segment à celui du liquide soit égal au rapport du carré sur Ψ au carré sur ΒΔ ; il est, dès lors, évident[2] que Ψ est supérieur à ΖΠ et inférieur à ΞΟ. Intercalons donc entre les paraboles ΑΞΔ et ΑΠΟΛ le segment de droite ΦΙ, égal à Ψ et parallèle à ΒΔ ; il coupe la parabole intermédiaire au point Υ ; on démontrera de nouveau que ΦΥ est double de ΥΙ, comme (sc. on a démontré[3] que) ΟΓ est double de ΞΓ. Menons du point Φ la droite ΦΩ, tangente à la parabole ΑΠΟΛ en Φ ; on démontrera donc comme plus haut[3] que ΑΙ est égal à ΧΙ et que ΑΧ est parallèle à ΦΩ. Il faut démontrer que le segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base ne touche pas la surface du liquide, et mis dans une position inclinée, s'inclinera de manière que sa base soit coupée par le liquide sur une plus grande étendue.

1. Ceci est possible, parce que, d'après la première figure de la prop. II, 10, $GO > PY$, $O\Xi = \frac{3}{2}\,GO$, et $PF = \frac{3}{2}\,PY$; sur la figure qui suit, le segment de droite ZP est le même que le segment PF sur la première figure.

2. Cf. Eucl. V, 10.

3. Plus haut, dans la même prop. II, 10.

Similiter autem demonstrabitur <quod> et, si portio ad humidum in grauitate habeat proportionem eandem, quam tetragonum quod ab NT ad id quod a BD, dimissa in humidum ita, ut basis ipsius non tangat superficiem humidi, consistet inclinata ita, ut basis ipsius secundum unum signum tangat superficiem humidi, et axis ipsius ad superficiem humidi faciat angulum aequalem angulo qui apud Φ.

Ἔστω δὴ πάλιν τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸ ὑγρὸν τῷ βάρει μείζονα μὲν λόγον ἔχον τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΠ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἐλάσσονα δὲ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΟ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἐχέτω τὸ ἀπὸ τᾶς Ψ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ· δῆλον οὖν ὅτι ἁ Ψ τᾶς μὲν ΖΠ μείζων ἐστίν, τᾶς δὲ ΞΟ ἐλάσσων. Ἐναρμόσθω δὴ εἰς τὸ μεταξὺ τᾶν ΑΞΔ, ΑΠΟΛ [τμημάτων] ἴσα τᾷ Ψ, παράλληλος δὲ τᾷ ΒΔ ἁ ΦΙ τέμνουσα τὰν μεταξὺ [τοῦ] κώνου τομὰν κατὰ τὸ Υ· πάλιν δὴ ἁ ΦΥ διπλασία τᾶς ΥΙ δειχθήσεται, καθάπερ ἁ ΟΓ τᾶς ΞΓ. Ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Φ τοῦ ΑΠΟΛ ἐφαπτομένα κατὰ τὸ Φ ἁ ΦΩ· ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἁ μὲν ΑΙ τᾷ ΧΙ ἴσα, ἁ δὲ ΑΧ τᾷ ΦΩ παράλληλος. Δεικτέον δὲ ὅτι τὸ τμᾶμα ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρόν, ὥστε τὰν βάσιν μὴ ἅπτεσθαι τᾶς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως κλιθήσεται, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ κατὰ πλείονα τόπον τέμνεσθαι ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ.

1 — p. 66, 10 hoc loco in C, post p. 59, 3 in ℒ || 1 quod om. ℒ || 3 NT Heiberg : h'p ℒ || 9 Ἔστω C : habeat ℒ || 14 ἐχέτω C : habeat ℒ || 16 τὸ Heiberg : τὸν C || ΑΞΔ, ΑΠΟΛ ms. C : apol a (lac.) d ℒ || 17 [τμημάτων] Cℒ : del. Heiberg || 18 [τοῦ] del. Heiberg || 19 διπλασία ℒ : ΔΙ ms. C || 19-20 τᾶς ΞΓ ms. C : ipsi xy ℒ || 24 τᾶς ἐπιφανείας Heiberg : φανείας C om. ℒ || 26 τέμνεσθαι C humectetur ℒ.

Fig. 115

Que le segment soit abandonné dans le liquide de la manière indiquée, et qu'il ait d'abord une inclinaison telle que sa base ne touche la surface du liquide en aucun point ; son intersection avec un plan passant par son axe et perpendiculaire à la surface du liquide est la parabole ΑΒΓ dans la surface du segment, la trace du plan sécant dans la surface du liquide est la droite ΕΖ ; soit ΒΔ l'axe de la parabole et le diamètre du segment ; coupons ΒΔ par les points Κ et Ρ comme précédemment[1], menons la droite ΗΛ, parallèle à ΕΖ et tangente à la parabole ΑΒΓ au point Η, la droite ΗΘ parallèle à ΒΔ, et la droite ΗΣ perpendiculaire à ΒΔ. Du moment que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est égal au rapport du carré sur Ψ au carré sur ΒΔ, il est évident que Ψ est égal à[2] ΗΘ, car cette propriété se démontrera comme précédemment; il s'ensuit que ΗΘ est aussi égal à ΦΙ et que, par conséquent, les segments ΑΦΧ et ΕΒΖ sont égaux entre eux[3]. Or puisque dans les segments égaux et semblables ΑΠΟΛ et ΑΒΓ on a mené les droites ΑΧ et ΕΖ, qui

1. Plus haut, dans la même prop. II, 10.
2. Cf. Eucl. V, 9.
3. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 24.

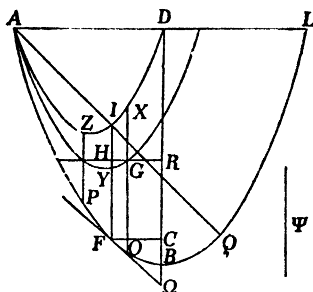


Fig. 115

Ἀφείσθω γὰρ εἰς τὸ ὑγρόν ὡς εἴρηται, καὶ κείσθω τὸ πρῶτον [καὶ] οὕτως κεκλιμένον, ⟨ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν⟩ ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν ἐν μὲν τᾷ τοῦ τμάματος ἐπιφανείᾳ γίνεται τομὰ ἁ ΑΒΓ, ἐν δὲ τᾷ τοῦ ὑγροῦ ἁ ΕΖ, ἄξων δὲ ἔστω [τῆς τομῆς] καὶ διάμετρος [τοῦ τμήματος] ἁ ΒΔ, καὶ τετμάσθω ἁ ΒΔ κατὰ τὰ Κ, Ρ ὁμοίως τοῖς πρότερον, ἄχθω δὲ καὶ ἁ μὲν ΗΛ παρὰ τὰν ΕΖ ἐφαπτομένα τᾶς [ἀπὸ τῆς] ΑΒΓ τομᾶς κατὰ τὸ Η, ἁ δὲ ΗΘ παρὰ τὰν ΒΔ, ἁ δὲ ΗΣ κάθετος ἐπὶ τὰν ΒΔ. Ἐπεὶ δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει λόγον ἔχει ποτὶ τὸ ὑγρόν, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς Ψ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, δῆλον ὅτι ἁ Ψ ἴσα ἐστὶν τᾷ ΗΘ· δειχθήσεται γὰρ ὁμοίως τοῖς πρότερον· ὥστε καὶ ἁ ΗΘ ἴσα ἐστὶν τᾷ ΦΙ· καὶ τὰ τμάματα ἄρα τὰ ΑΦΧ, ΕΒΖ ἴσα ἐστὶν ἀλλάλοις. Ἐπεὶ δ' ἐν ἴσοις καὶ ὁμοίοις τμαμάτεσσι τοῖς ΑΠΟΛ, ΑΒΓ ἀγμέναι ἐντὶ αἱ ΑΧ, ΕΖ

2 [καὶ] C : om. 𝔅 || 2 ‹ὥστε — 3 καθ' ἓν› Heiberg : ut basis ipsius neque secundum unum 𝔅 || 4 ὀρθῷ om. C : recto 𝔅 || 7 τῆς τομῆς C𝔅 : del. Heiberg || τοῦ τμήματος C𝔅 : del. Heiberg || 10 ἀπὸ τῆς C : om. 𝔅 del. Heiberg || κατὰ 𝔅 : κα C || 11 ἐπεὶ 𝔅 : ἐπὶ C || 16 ἐπεὶ 𝔅 : ἐπὶ C || δ' C : om. 𝔅.

découpent des segments égaux, l'une de l'extrémité de la base, l'autre d'un point autre que l'extrémité, celle qui a été menée de l'extrémité de la base fera avec le diamètre du segment un angle aigu plus petit[1]. Comme, d'autre part, l'angle Λ du triangle ΗΛΣ est supérieur[2] à l'angle Ω du triangle ΦΤΩ, il est évident que Βϛ est inférieur à ΒΤ, que ϛΡ est supérieur à ΡΤ, et que Ηϡ est supérieur à ΦΗ, d'où il suit que ϡΘ est inférieur à ΗΙ. Comme, d'autre part, ΦΥ est double de ΥΙ, il est évident que Ηϡ est supérieur[3] au double de ϡΘ. Soit donc ΗΑ′ double de Α′Θ ; il est, dès lors, évident, d'après ces propriétés, que le segment ne restera pas dans sa position, mais s'inclinera jusqu'à ce que sa base touche la surface du liquide en un seul point.

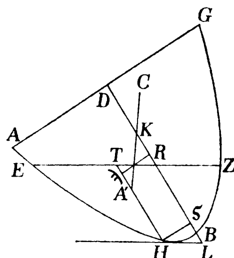


Fig. 116

Qu'elle la touche donc en un seul point, comme le montre la troisième figure[4] ; construisons le reste comme précédemment ; on démontrera ainsi de nouveau que ΘΗ est égal à ΦΙ et que les segments ΑΦΧ et ΑΒΖ sont égaux entre eux ; comme, d'autre part, dans les segments égaux et semblables ΑΠΟΛ et ΑΒΓ on a mené les droites ΑΧ et ΑΖ qui découpent des segments égaux, ces droites font des angles égaux avec les

1. Cf. une des notes antér. de cette prop.
2. Cf. Eucl. I, 39.
3. Puisque ΦΗ > 2ΗΙ ; Ηϡ > ΦΗ ; ϡΘ < ΗΙ.
4. C'est-à-dire la dernière figure, 117, de la prop. II, 10.

ἴσα τμάματα ἀφαιροῦσαι, καὶ ἁ μὲν ἀπ' ἄκρας τᾶς βάσιος, ἁ δὲ οὐκ ἀπ' ἄκρας, ἐλάσσονα ποιήσει τὰν ὀξεῖαν ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ τμάματος ἁ ἀπ' ἄκρας τᾶς βάσιος ἀχθεῖσα. Καὶ ἐπειδὴ τοῦ ΗΛΣ τριγώνου ἁ Λ μείζων τᾶς Ω γωνίας τοῦ ΦΤΩ τριγώνου, δῆλον ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἁ Βϛ′ τᾶς ΒΤ, ἁ δὲ ϛΡ τᾶς ΡΤ μείζων, καὶ ἁ Ηϡ μείζων τᾶς ΦΗ · ἁ ϡΘ ἄρα ἐλάσσων τᾶς ΗΙ. Καὶ ἐπεὶ διπλασία ἐστὶν ἁ ΦΥ τᾶς ΥΙ, δῆλον ὅτι ἁ Ηϡ μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία τᾶς ⟨ϡΘ. Ἔστω δὴ ἁ ΗΑ′ διπλασία⟩ τᾶς Α′Θ · δῆλον δὴ ἐκ τούτων ὅτι οὐ μενεῖ τὸ τμᾶμα, ἀλλὰ ἐπικλιθήσεται, ἕως ἂν ἁ βάσις αὐτοῦ θίγῃ καθ' ἓν σαμεῖον τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

Fig. 116

Ἀπτέσθω δὴ καθ' ἓν σαμεῖον, ὡς ἐν τῷ τρίτῳ σχήματι ἐγράφθη, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω · δειχθήσεται δὴ πάλιν ἅ τε ΘΗ ἴσα ἐοῦσα τᾷ ΦΙ καὶ τὰ ΑΦΧ, ΑΒΖ τμάματα ἴσα ἀλλάλοις. Καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις καὶ ὁμοίοις τμαμάτεσσι τοῖς ΑΠΟΛ, ΑΒΓ ἀγμέναι ἐντὶ αἱ ΑΧ, ΑΖ ἴσα τμάματα ἀφαιροῦσαι, ἴσας ποιοῦσι γωνίας ποτὶ

4 ΗΛΣ ms. C : hle 𝔚 ‖ ἁ Λ ms. C : angulus 𝔚 ‖ 5 τοῦ ΦΤΩ τριγώνου C : om. 𝔚 ‖ 6 Βϛ Heiberg : ΒΓ ms. C bs 𝔚 ‖ ϛΡ Heiberg : ΓΡ ms. C sr 𝔚 ‖ 7 διπλασία Heiberg : διπλῆ C ‖ 9 Α′Θ Heiberg : ΑΘ ms. C lt 𝔚 ‖ 11 θίγῃ incertum in C : tangat 𝔚 ‖ 15 δὴ Heiberg : δὲ C𝔚 ‖ ΘΗ Heiberg : ΘΜ ms. C tm 𝔚.

diamètres des segments[1] ; il s'ensuit que dans les triangles ΛΗΣ et ΦΤΩ les angles de sommets Λ et Ω sont égaux, et que sont égaux les segments de droite ΒΣ

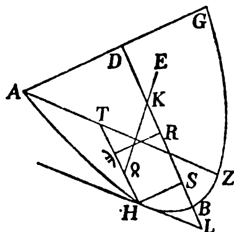


Fig. 117

et ΒΤ, ΣΡ et ΡΤ, Ηϡ et ΦΗ, ϡΘ et ΗΙ. Mais comme ΦΥ est double de ΥΙ, il est manifeste que Ηϡ est supérieur[1] au double de ϡΘ. Soit donc ΗϘ double de ϘΘ ; il est dès lors de nouveau évident, d'après ces relations, que le segment ne restera pas dans sa position, mais s'inclinera du côté du point Α. Dès lors, comme on a supposé que le segment touche le liquide en un seul point, il est évident que sa base sera submergée par le liquide sur une plus grande étendue.

1. Cf. les notes antérieures.

ταῖς διαμέτροις τῶν τμαμάτων· τῶν ἄρα ΛΗΣ, ΦΤΩ αἱ ποτὶ τοῖς Λ, Ω γωνίαι ἴσαι ἐντί, καὶ ἁ ΒΣ εὐθεῖα τᾷ ΒΤ

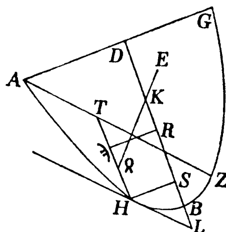


Fig. 117

ἴσα καὶ ἁ ΣΡ τᾷ ΡΤ καὶ ἁ Ηϡ τᾷ ΦΗ καὶ ἁ ϡΘ τᾷ ΗΙ. Ἐπεὶ δὲ διπλασία ἐστὶν ἁ ΦΥ τᾶς ΥΙ, φανερὸν ὅτι ἁ Ηϡ μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία τᾶς ϡΘ. Ἔστω οὖν ἁ Ηϙ τᾶς ϙΘ διπλασίων· πάλιν δὴ ἐκ τούτων δῆλον ὡς οὐ μενεῖ τὸ τμᾶμα, ἀλλ' ἐπικλιθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Α. Ἐπεὶ δὴ καθ' ἓν σαμεῖον ὑπετέθη τὸ τμᾶμα ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, δῆλον ὅτι κατὰ πλείονα τόπον ἁ βάσις ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ καταλαφθήσεται.

1 ἄρα ΛΗΣ, ΦΤΩ ms. C : igitur ahbz afq B ‖ 2 ἁ B : om. C ‖ ΒΣ ms. B : ΒΕ ms. C ‖ τᾷ B : τῆς C ‖ 3 ΡΤ Heiberg : ΠΡΤ ms. C rcB ‖ Ηϡ ms. C mϡ B ‖ ΗΙ ms. C : mi B ‖ 5 διπλασία Heiberg : διπλῆ C ‖ 6 δὴ Heiberg : δ' CB ‖ 8 δὴ C : om. B ‖ ὑπετέθη Heiberg : ὑποτεθῇ C supponebatur B ‖ 10 seq. in B p. 59, 3 — 61, 28.

STOMACHION

NOTICE

Ce traité est sans doute authentique, puisqu'il est mentionné par Marius Victorinus[1], Atilius Fortunatianus[2] et Ausonius[3], mais à classer parmi les *Scripta minora*. L'analyse géométrique s'y exerce sur un jeu de patience consistant à « paver » une plaque carrée ou rectangulaire au moyen de quatorze lamelles d'ivoire affectant des formes de triangles ou de polygones. Archimède n'est pas l'inventeur de ce jeu, mais il a essayé, à en juger d'après les fragments conservés, de le hausser au niveau d'un problème de géométrie en postulant que les aires des lamelles soient multiples les unes des autres.

Il existe, jusqu'à présent, deux fragments du texte de cet opuscule, dont le premier, en grec, fut retrouvé par Heiberg dans le palimpseste de Jérusalem. Le second fragment fut découvert, dans un manuscrit arabe, par l'orientaliste H. Suter, qui en publia une traduction[4] en 1899.

Nous faisons suivre dans cette édition le texte grec, relatif à la première partie du traité, de la traduction allemande de la version arabe de H. Suter.

1. *Ars grammatica*, éd. O. Keil, Leipzig, 1871, t. VI, p. 100.
2. Cf. *Grammatici latini ueteres*, éd. Putschius, p. 2684.
3. *Ausoni opuscula*, éd. R. Reiper, Leipzig, 1886, p. 208.
4. *Der loculus Archimedius oder das Syntemachion des Archimedes*, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, t. IX, 1899, p. 491-500.

LE STOMACHION D'ARCHIMÈDE

Comme le jeu appelé Stomachion offre une étude variée de la transposition des figures dont il se compose, j'ai cru nécessaire de traiter d'abord <des différentes parties> dans lesquelles il est divisé ainsi que des figures auxquelles ces parties peuvent, chacune, être comparées ; j'ai, de plus, indiqué les angles qui, pris deux à deux, <font deux angles droits>, pour connaître les arrangements des figures engendrées par ces parties, soit que les côtés qui apparaissent dans ces figures soient alignés, soit qu'ils s'écartent un peu de l'alignement sans qu'on s'en aperçoive ; car des arrangements de ce genre relèvent de l'adresse, et si ces côtés s'écartent légèrement sans que la vue s'en aperçoive, les figures qui sont composées ne sont pas à rejeter pour autant.

Il est donc possible <de composer> de ces parties un grand nombre de figures parce qu' <il est loisible> de transposer telle partie dans un autre endroit, occupé par une figure égale et semblable, et de lui en substituer une autre. Comme il arrive quelquefois que deux figures prises ensemble soient équivalentes à une seule figure et semblables à une seule figure, ou que deux figures prises ensembles soient égales et semblables à deux figures prises ensemble, un plus grand nombre encore de figures sont composées par la transposition. Nous commençons par exposer une proposition se rapportant à cette question.

ΣΤΟΜΑΧΙΟΝ

Ἀρχιμήδους Στομάχιον

Τοῦ λεγομένου Στομαχίου ποικίλαν ἔχοντος τᾶς ἐξ ὧν συνέστακε σχημάτων μεταθέσεως θεωρίαν ἀναγκαῖον ἡγησάμην πραττον του ⟨......⟩ ρῶν ἐκθέσθαι, εἴς τε ἃ διαιρεῖται, ἕκαστόν τε αὐτῶν τίνι ἐστὶν ὁμοιούμενον, ἔτι δὲ καὶ ποῖαι γωνίαι σύνδυο λαμβανόμεναι ⟨....⟩ καὶ ⟨...⟩ θάς, εἴρηται πρὸς τὸ τὰς ἐναρμόσεις τῶν ἐξ αὐτῶν γεννωμένων σχαμάτων γιγνώσκεσθαι, εἴτε ἐπ' εὐθείας εἰσὶν αἱ γεννώμεναι ἐν τοῖς σχάμασι πλευραί, εἴτε καὶ μικρῶς λείπουσαι τᾷ θεωρίᾳ λανθάνουσιν · τὰ γὰρ τοιαῦτα φιλότεχνα · καὶ ἐὰν ἐλάχιστον μὲν λείπηται, τᾷ δὲ θεωρίᾳ λανθάνῃ, οὐ παρὰ τοῦτ' ἐστὶν ἔκβλητα ἃ συνίσταται.

Ἔστι μὲν οὖν ἐξ αὐτῶν οὐκ ὀλίγων σχημάτων ....ο.. διὰ τὸ.....ν..τον εἶναι εἰς ἕτερον τόπον τοῦ ἴσου καὶ ἰσογωνίου σχάματος μετατιθεμε... καὶ ἑτέ..... λαμβάνοντας. ⟨Ἐνιό⟩τε δὲ καὶ δύο σχημάτων συνάμφω ἑνὶ σχήματι ἴσων ὄντων καὶ ὁμοίων τῷ ἑνὶ σχήματι ἢ καὶ δύο σχημάτων συνάμφω ἴσων τε καὶ ὁμοίων ὄντων δυσὶ σχήμασι συνάμφω πλείονα σχήματα συνίσταται ἐκ τῆς μεταθέσεως. Προγράφομεν οὖν τι θεώρημα εἰς αὐτὸ συντεῖνον.

6 σύνδυο : συν. δοιο C || 7 <...> requiritur <ποιοῦσι δύο ὀρ> θάς Heiberg || 10 λείπουσαι Heiberg : λιποῦσαι C || 11 λείπηται Heiberg : λίπηται C || 14 τόπον Heiberg : τόπου C || 16 σχημάτων Heiberg : σχήματα C || 19-20 προγράφομεν Heiberg : προγραφόμενον C.

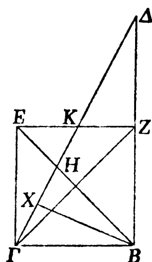


Fig. 118

Soit, en effet, le parallélogramme rectangulaire[1] ZΓ ; que le côté EZ <soit divisé en deux parties égales> par le point K ; menons des points Γ et B les droites ΓK, BE <et ΓZ> ; prolongeons ΓK et BZ jusqu'à leur point de rencontre Δ... Comme EK est égal à KZ, ΓE, c'est-à-dire BZ, est égal à ZΔ ; ΓZ est, par conséquent, supérieur à ZΔ ; il s'ensuit[2] que l'angle ZΔΓ est supérieur à l'angle ZΓΔ. Mais les angles HBΔ et ZΓB sont égaux, puisque chacun d'eux est égal à la moitié d'un angle droit ; l'angle ΓHB est donc à son tour supérieur à l'angle HΓB, parce que l'angle ΓHB est égal à la somme des angles intérieurs opposés[3] HBΔ et HΔB, d'où il suit[4] que ΓB est supérieur à BH. Si on divise, dès lors, ΓH en deux parties égales par le point X, l'angle ΓXB sera obtus ; car du moment que ΓX est égal à XH et que XB est en commun, deux côtés sont égaux chacun à chacun, et la base ΓB est supérieure à la base BH ; il s'ensuit[5] que l'angle est supérieur à l'angle. L'angle ΓXB est donc obtus, et l'angle adjacent est aigu. Or l'angle ΓBH est égal à la moitié d'un angle droit, puisqu'on avait supposé

1. Il s'agit plutôt d'un carré ; les figures, inexactes et incomplètes dans le manuscrit, ont été refaites d'après le texte par Heiberg et P. Heegaard.
2. Cf. Eucl. I, 18.
3. Cf. Eucl. I, 32.
4. Cf. Eucl. I, 19.
5. Cf. Eucl. I, 25.

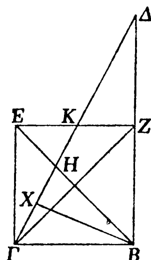


Fig. 118

Ἔστω γὰρ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΓ, καὶ δε. ι.....ω ἡ ΕΖ τῷ Κ, καὶ.. διήχθωσαν ἀπὸ τῶν Γ, Β αἱ ΓΚ, ΒΕ. ει..ων... τῶν... Γ .... ἐκ⟨βεβλή⟩σθωσαν αἱ ΓΚ, ΒΖ καὶ συμπιπτέ⟨τωσαν κατὰ τὸ Δ.....⟩ ἡ ΓΗ. Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΚ τῇ ΚΖ, ⟨ἴση⟩ καὶ ἡ ΓΕ, τουτέστιν ἡ ΒΖ, τῇ ΖΔ· ὥ⟨στε⟩ μείζων ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ· καὶ γωνία ⟨ἄρα⟩ ἡ ὑπὸ τῶν ΖΔΓ τῆς ὑπὸ τῶν ΖΓΔ μείζων. Ἴσαι δέ εἰσιν αἱ ὑπὸ ΗΒΔ, ΖΓΒ· ἡμίσεια γὰρ ὀρθῆς ἑκατέρα· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΓΗΒ, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΗΒΔ, ΗΔΒ, τῆς ὑπὸ τῶν ΗΓΒ· ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ΓΒ τῆς ΒΗ. Ἐὰν ἄρα δίχα τμηθῇ ἡ ΓΗ κατὰ Χ, ἔσται ἀμβλεῖα μὲν ἡ ὑπὸ ΓΧΒ· ἐπεὶ γὰρ ἴση ἡ ΓΧ τῇ ΧΗ, καὶ κοινὴ ἡ ΧΒ, δύο δυσὶν ἴσαι· καὶ βάσις ἡ ΓΒ τῆς ΒΗ μείζων· καὶ ἡ γωνία ἄρα τῆς γωνίας μείζων. Ἀμβλεῖα μὲν ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΧΒ, ὀξεῖα δὲ ἡ ἐφεξῆς. Ἡμίσεια δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΓΒΗ· τοῦτο γάρ ἐστιν ὑποκείμενον τοῦ παραλληλογράμμου· ὀξεῖα δὲ ἡ ὑπὸ ΒΧΗ. Καὶ.τι δὴ ἴση ἡ λοιπαὶ ΓΒΗ καὶ συνίσταται καὶ διαιρεῖται τοῦτο ἐπ. ον τον.... .... βάσιος..τι....... αστ..α.. ἄρα ο... ΑΒ....αν..ο...τὴν ΓΑ..... νῶν....... ἔχον...τὸ

14 βάσις Heiberg : βάσεις C || 18-19 corrupta || 20 — p. 72, 2 incerta.

cela pour le parallélogramme, et l'angle BXH est aigu. Et... cette figure se compose et se décompose...

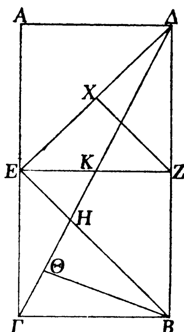


Fig. 119

Divisons ΓA en deux parties égales par le point E et menons par E la parallèle EZ à BΓ ; les quadrilatères ΓZ et ZA sont donc des carrés. Menons les diagonales ΓΔ, BE et EΔ ; divisons ΓH et EΔ en deux parties égales par les points Θ et X, menons les droites BΘ et XZ, et menons par les points ..., K les parallèles K.,. Ξ à BΔ. D'après la proposition qui précède, l'angle Θ dans le triangle BΓΘ est donc obtus, et l'angle qui reste est aigu... or il est évident...

Le livre d'Archimède sur la division de la figure appelée Stomachion en quatorze figures partielles qui sont en rapport avec elle.

Décrivons un parallélogramme, soit ABGD ; divisons BG en deux parties égales par le point E, élevons la perpendiculaire EZ à BG, menons les diagonales AG, BZ et ZG, divisons aussi BE en deux parties égales par le point H, et élevons la perpendiculaire HT à BE ; plaçons ensuite une règle au point H, orientons-la

ἐπίλοιπ................. δύνασθαι ἀρ....ξειν ἐκ....τῶν τομῶν ....τῶν τάξιν ἐχοντ..

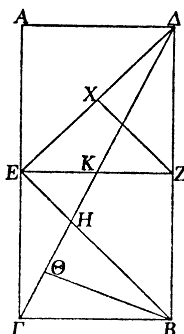


Fig. 119

Τετμήσθω ἡ ΓΑ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ· ἔστιν οὖν τετράγωνα τὰ ΓΖ, ΖΑ. Ἤχθωσαν διάμετροι αἱ ΓΔ, ΒΕ, ΕΔ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΓΗ, ΕΔ κατὰ τὰ Θ, Χ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΘ, ΧΖ, καὶ διὰ τῶν..., Κ τῇ ΒΔ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ Κ.., ..Ξ. Διὰ τὸ προκείμενον ἄρα θεώρημα τοῦ ΒΓΘ τριγώνου ἡ πρὸς τῷ Θ γωνία ἀμβλεῖα, ἡ δὲ λοιπὴ ὀξεῖα.... νερὸν φανερὸν δὲ...ει...

Das Buch des Archimedes über die Teilung der Figur Stomaschion in vierzehn zu ihr in Verhältnis stehende Figuren.

Wir zeichnen ein Parallelogramm, es sei dies ABGD, halbieren BG in E, errichten EZ senkrecht auf BG, ziehen die Diagonalen AG, BZ und ZG, halbieren ebenfalls BE in H, und errichten HT senkrecht auf BE ; dann legen wir das Lineal an

11 sequitur fragmentum arabice seruatum, transl. ab H. Suter; cf. p. 69.

vers le point A, menons HK, divisons AL par le point M, et menons BM ; le rectangle AE se trouve ainsi divisé en sept parties. Divisons ensuite GD en deux parties égales par le point N et ZG en deux parties égales par le point C, menons EC, plaçons la règle aux points B et C et menons CO et CN ; le rectangle ZG sera ainsi lui aussi divisé en sept parties, bien que d'une autre manière que le premier rectangle, et, partant, le carré entier se trouve divisé en quatorze parties.

Fig. 120

Nous allons démontrer maintenant que chacune des quatorze parties est dans un rapport commensurable avec le carré entier.

Du moment que ZG est la diagonale du rectangle ZG, le triangle DZG est la moitié de ce rectangle et, par conséquent, le quart du carré. Mais le triangle GNC est égal au quart du triangle DZG, parce que le prolongement de EC passe par le point D, et que, dès lors, le triangle GDC est la moitié du triangle DZG et égal à la somme des deux triangles GNC et DNC ; il s'ensuit que le triangle GNC est égal au seizième du carré. Si nous supposons, de plus, la droite OC orientée vers le point B, comme elle a été effectivement tracée, NC sera parallèle au côté BG du carré ou du triangle

den Punkt H und visieren nach dem Punkt A und ziehen HK, halbieren AL in M und ziehen BM, so ist das Rechteck AE in sieben Teile geteilt. Hierauf halbieren wir GD in N, ebenso ZG in C, ziehen EC, legen das Lineal an die Punkte B und C an und ziehen CO, ziehen noch CN, so ist auch das Rechteck ZG in sieben Teile, aber auf andere Weise als das erste, geteilt, mithin das ganze Quadrat in vierzehn Teile.

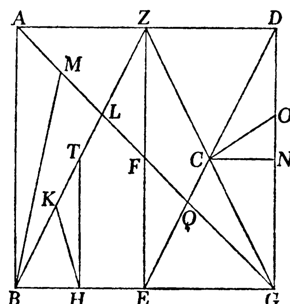


Fig. 120

Wir beweisen nun, dass jeder der vierzehn Teile zum ganzen Quadrat in rationalem Verhältnis stehe.

Weil ZG die Diagonale des Rechtecks ZG ist, so ist Dreieck DZG die Hälfte dieses Rechtecks, also 1/4 des Quadrates. Aber Dreieck GNC ist 1/4 von Dreieck DZG, weil, wenn wir EC verlängern, es in den Punkt D trifft, und dann also Dreieck GDC die Hälfte des Dreiecks DZG und gleich den beiden Dreiecken GNC und DNC zusammen ist ; also ist Dreieck GNC = 1/16 des Quadrats. Wenn wir nun ferner annehmen, die Linie OC sei nach dem Punkte B gerichtet, wie sie in der Tat auch gezeichnet wurde, so ist die Linie NC parallel zur Seite BG

OBG, d'où il résulte[1] que BG est à NC comme GO est à NO. Or BG est le quadruple de NC, et, par conséquent, GO est le quadruple de NO ; il s'ensuit que GN est le triple de NO, et que le triangle GNC est le triple[2] du triangle ONC. Mais puisque, comme nous l'avons montré, le triangle GNC est le seizième du carré, le triangle ONC est le quarante-huitième du carré, de manière qu'il reste pour le quadrilatère DOCZ un sixième de l'aire du carré. De plus, du moment que, par hypothèse[3], la droite NC passe par le point F, et que CF serait parallèle à GE, EG est à CF comme[4] EQ est à CQ et comme GQ est à FQ. Or comme[5] EQ est le double de CQ et GQ le double de FQ, le triangle EQG est double de chacun des deux triangles GCQ et EFQ. Mais il est évident[6] que le triangle EGZ est double du triangle EFG, parce que ZE est double de FE. Or le triangle EGZ est égal au quart du carré, d'où il suit que le triangle EFG est égal au huitième du carré, mais comme le triangle EFG est triple de chacun des deux triangles EFQ et GCQ, chacun de ces derniers triangles est égal au vingt-quatrième du carré AG. D'autre part, le triangle EGQ est double de chacun des deux triangles EFQ et GCQ, et donc égal au douzième du carré. Puisque, en outre, ZF est égal à EF, le triangle ZFG est égal au triangle EFG ; si nous retranchons maintenant (sc. de ces derniers triangles) le triangle GCQ, égal au triangle EFQ, il reste le quadrilatère FQCZ, équivalent au triangle EGQ, d'où il suit que le quadrilatère FQCZ est lui aussi égal au douzième du carré AG.

Ayant ainsi divisé le rectangle ZG en sept parties, passons à la division de l'autre rectangle.

1. Cf. Eucl. VI, 2.
2. Cf. Eucl. VI, 1.
3. Puisque DG et ZE, égaux entre eux, sont divisés en deux parties égales par les points N et F, ainsi que ZG par le point C.
4. Cf. Eucl. VI, 4.
5. Parce que EG = 2CF.
6. Cf. Eucl. VI, 1.

des Quadrates, resp. des Dreiecks OBG, also hat man die Proportion

BG : NC = GO : NO.

Es ist aber BG das Vierfache von NC, also auch GO das Vierfache von NO ; deshalb ist nun GN das Dreifache von NO, und Dreieck GNC = 3 ONC. Da aber, wie wir gezeigt haben, Dreieck GNC = 1/16 des Quadrates ist, so ist Dreieck ONC = 1/48 des Quadrates. Weil ferner Dreieck GDZ = 1/4 des Quadrates ist und deshalb GNC = 1/16 desselben und Dreieck NCO = 1/48 desselben, so bleibt für das Viereck DOCZ = 1/6 der Quadratfläche übrig. Nach der Voraussetzung geht ferner die Linie NC durch den Punkt F, und es wäre CF parallel zu GE ; also hat man die Proportion EG : CF = EQ : CQ = GQ : FQ. Weil nun EQ = 2 CQ und GQ = 2 FQ, so ist Dreieck EQG das Doppelte jedes der beiden Dreiecke GCQ und EFQ. Es ist aber klar, dass Dreieck EGZ = 2 mal Dreieck EFG ist, weil ZE = 2 FE ist. Das Dreieck EGZ ist aber = 1/4 des Quadrates, also Dreieck EFG = 1/8 desselben. Dieses ist aber das Dreifache jedes der beiden Dreiecke EFQ und GCQ ; also ist jedes dieser beiden Dreiecke = 1/24 des Quadrates AG. Und das Dreieck EGQ ist das Doppelte jedes der beiden Dreiecke EFQ und GCQ ; also ist es = 1/12 des Quadrates. Weil ferner ZF = EF ist, so ist Dreieck ZFG = Dreieck EFG ; wenn wir nun Dreieck GCQ = Dreieck EFQ wegnehmen, so bleibt Viereck FQCZ = Dreieck EGQ ; also ist auch Viereck FQCZ = 1/12 des Quadrates AG.

Wir haben nun das Rechteck ZG in 7 Teile geteilt und gehen nun zur Teilung des andern Rechtecks über.

BZ et EC étant deux diagonales parallèles[1], et ZF étant égal à EF, les triangles ZLF et EFQ sont égaux[2], et, par conséquent, le triangle ZLF est la vingt-quatrième partie du carré AG. Comme BH est égal à HE, le triangle BEZ est quadruple du triangle BHT, chacun des deux triangles étant rectangle[3]. Mais comme le triangle BEZ est le quart du carré ABGD, le triangle BHT en est le seizième. De plus, la droite HK passe, par hypothèse, par le point A, d'où il suit[4] que AB est à HT comme BK est à KT. Mais comme AB est double[5] de HT, BK est double de KT, et, par conséquent, BT triple de KT ; il s'ensuit que le triangle BHT est triple du triangle KHT. Mais le triangle BHT étant le seizième du carré entier, le triangle KHT en est le quarante-huitième. En outre, le triangle BKH est double du triangle KHT ; il est donc la vingt-quatrième partie du carré. Puisque, de plus, BL est double[6] de ZL et AL double de LF, le triangle ABL est double du triangle ALZ et le triangle ALZ double du triangle ZLF. Mais comme le triangle ZLF est le vingt-quatrième du carré entier, le triangle ALZ en est le douzième, d'où il suit que le triangle ABL en est le sixième. Or les triangles ABM et BML étant égaux, chacun d'eux est égal au douzième du carré. Il reste encore le pentagone LFEHT, qui est égal à la moitié du sixième augmentée de la moitié du huitième du carré entier[7].

Le carré AE ayant ainsi été divisé, lui aussi, en sept parties, toute la figure ABGD se trouve divisée en quatorze parties ayant avec elle des rapports commensurables, et c'est ce que nous voulions.

1. Cf. Eucl. VI, 2.
2. Cf. Eucl. VI, 19.
3. Et les triangles BEZ et BHT étant, par conséquent, semblables et ayant entre eux le rapport $\frac{\overline{BE}^2}{\overline{BH}^2}$; cf. Eucl. VI, 19.
4. Cf. Eucl. VI, 4.
5. Parce que T divise BZ en deux parties égales.
6. Parce que les triangles ABL et ZFL sont semblables, et AB = 2ZF.
7. Cf. notes complémentaires.

Weil BZ und EC zwei parallele Diagonalen sind, und ZF = EF ist, so ist Dreieck ZLF = EFQ, mithin Dreieck ZLF = 1/24 des Quadrates AG. Weil BH = HE ist, so ist Dreieck BEZ das Vierfache des Dreiecks BHT; denn jedes desselben ist rechtwinklig. Da aber Dreieck BEZ = 1/4 des Quadrates ABGD ist, so ist Dreieck BHT = 1/16 desselben. Nach unserer Voraussetzung geht ferner die Linie HK durch den Punkt A; also hat man die Proportion

$$AB : HT = BK : KT.$$

Es ist aber AB = 2 HT, also auch BK = 2 KT, mithin BT = 3 KT; also ist Dreieck BHT das Dreifache des Dreiecks KHT. Weil aber Dreieck BHT = 1/16 des ganzen Quadrates ist, so ist Dreieck KHT = 1/48 desselben. Ferner ist Dreieck BKH das Doppelte des Dreiecks KHT, also = 1/24 des Quadrates. Da weiter BL = 2 ZL, und AL = 2 LF ist, so ist Dreieck ABL das Doppelte des Dreiecks ALZ und Dreieck ALZ das Doppelte des Dreiecks ZLF. Weil aber Dreieck ZLF = 1/24 des ganzen Quadrates ist, so ist Dreieck ALZ = 1/12 desselben, also Dreieck ABL = 1/6. Es ist aber Dreieck ABM = Dreieck BML, also jedes dieser beiden Dreiecke = 1/12 des Quadrates. Es bleibt noch übrig das Fünfeck LFEHT = der Hälfte eines Sechstels mehr der Hälfte eines Achtels des ganzen Quadrates.

Wir haben also auch das Quadrat AE in 7 Teile geteilt; mithin ist die ganze Figur ABGD in 14 Teile geteilt, welche zu ihr in Verhältnis stehen; und das ist, was wir wollten.

LA MÉTHODE A ÉRATOSTHÈNE

NOTICE

Dans ce traité, dont la tradition ne nous a conservé que quinze propositions, Archimède développe, en les généralisant, les principes de la méthode d'investigation, au moyen de la statique, dont la quadrature de la parabole avait montré l'efficacité. Après avoir démontré une nouvelle fois, mais par un procédé statique différent de celui qui lui avait servi la première fois, la proposition sur l'aire du segment de parabole, Archimède applique sa méthode à la comparaison de volumes et à la recherche de centres de gravité. La proposition 2 compare le volume de la sphère à celui d'un cône ayant pour base le grand cercle et pour hauteur le rayon de la sphère, et à celui d'un cylindre ayant pour base le grand cercle et pour hauteur le diamètre de la sphère ; la proposition 3 compare le volume d'un sphéroïde, c'est-à-dire d'un ellipsoïde de révolution, à celui du cylindre ayant pour base le grand cercle et pour hauteur l'axe de l'ellipsoïde ; la proposition 4 le volume d'un segment de conoïde rectangle, c'est-à-dire d'un paraboloïde de révolution, à celui d'un cône de même base et de même hauteur. Suivent des propositions relatives aux volumes du segment sphérique et du segment d'ellipsoïde comparés à celui du cône, inscrit dans ces segments, de même base et de même hauteur, et aux centres de gravité de l'hémisphère, du segment de paraboloïde de révolution, du segment sphérique et des segments de sphéroïde et de conoïde obtusangle, c'est-à-dire d'hyperboloïde de révolution. Les propositions 12-15, les dernières qu'on ait pu déchiffrer

dans le manuscrit unique, C, de ce traité, sont consacrées à l'étude du volume d'une figure à laquelle sa forme a valu le nom de « sabot ». Il s'agit de la figure découpée d'un cylindre inscrit dans un prisme droit à bases carrées par un plan passant par le centre de l'un des carrés de base et par un des côtés du carré opposé. Archimède démontre, d'abord par sa méthode statique, proposition 12, ensuite géométriquement, proposition 15, que le volume de cette figure est égal à la sixième partie du volume du prisme. L'établissement de cette équivalence a constitué le premier « kybismos », la première mesure exacte d'un volume, limité en partie par une surface courbe, au moyen d'un volume limité entièrement par des plans et, partant, au moyen d'un cube. Ce coup de génie est, dans l'espace à trois dimensions, le pendant de la quadrature exacte de la parabole dans le plan. Archimède est pleinement conscient de la portée de sa découverte. Dans la lettre à Eratosthène placée comme introduction en tête de ce traité il souligne la nouveauté de la proposition établissant l'équivalence du « sabot » et celle d'une autre figure, à savoir celle qui est découpée dans un cylindre inscrit dans un cube par un second cylindre inscrit dans le même cube, avec des solides limités par des plans.

Les mots entre < > du texte grec qui ne sont pas mentionnés dans l'apparat critique sont des conjectures de Heiberg pour les lacunes ou les passages mal lisibles du manuscrit C.

LA MÉTHODE D'ARCHIMÈDE RELATIVE AUX PROPOSITIONS MÉCANIQUES, A ÉRATOSTHÈNE

Archimède à Ératosthène, prospérité !

Je t'ai envoyé antérieurement certains théorèmes que j'avais découverts, en me bornant à en rédiger les énoncés et en t'invitant à trouver les démonstrations que je n'avais pas encore indiquées ; les énoncés des théorèmes envoyés étaient les suivants ; premièrement : si on inscrit dans un prisme droit, ayant pour base un parallélogramme[1], un cylindre ayant ses bases situées dans les parallélogrammes[1] opposés et (sc. certaines de) ses génératrices dans les plans restants du prisme[2], et si on mène un plan par le centre du cercle de base du cylindre et par un des côtés du carré situé dans le plan opposé, le plan ainsi mené découpera du cylindre un segment compris entre deux plans et la surface du cylindre, l'un des plans étant le plan mené, l'autre celui qui contient la base du cylindre, et la surface (sc. cylindrique) étant comprise entre les plans indiqués, et le segment découpé du cylindre est équivalent à la sixième partie du prisme entier. L'énoncé du second théorème était le suivant : si on inscrit dans un cube un cylindre ayant ses bases situées dans des parallélogrammes[1] opposés, et sa surface

1. Le contexte montre qu'il s'agit d'un carré.
2. Le cylindre est donc tangent aux quatre faces du prisme.

ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ ΕΦΟΔΟΣ

Ἀρχιμήδους Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος

Ἀρχιμήδης Ἐρατοσθένει εὖ πράττειν.

Ἀπέστειλά σοι πρότερον τῶν εὑρημένων θεωρημάτων ἀναγράψας αὐτῶν τὰς προτάσεις φάμενος εὑρίσκειν ταύτας τὰς ἀποδείξεις, ἃς οὐκ εἶπον ἐπὶ τοῦ παρόντος· ἦσαν δὲ τῶν ἀπεσταλμένων θεωρημάτων αἱ προτάσεις αἵδε· τοῦ μὲν πρώτου· ἐὰν εἰς πρίσμα ὀρθὸν παραλληλόγραμμον ἔχον βάσιν κύλινδρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν βάσεις ἔχων ἐν τοῖς ἀπεναντίον παραλληλογράμμοις, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τῶν λοιπῶν τοῦ πρίσματος ἐπιπέδων, καὶ διά τε ⟨τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου,⟩ ὅς ἐστι βάσις τοῦ κυλίνδρου, καὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐν τῷ κατεναντίον ἐπιπέδῳ ἀχθῇ ἐπίπεδον, τὸ ἀχθὲν ἐπιπίπεδον ἀποτεμεῖ τμῆμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, ὅ ἐστι περιεχόμενον ὑπὸ δύο ἐπιπέδων καὶ ἐπιφανείας κυλίνδρου, ἑνὸς μὲν τοῦ ἀχθέντος, ἑτέρου δὲ ἐν ᾧ ἡ βάσις ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου, τῆς δὲ ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων, τὸ δὲ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τμῆμα ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὅλου πρίσματος. Τοῦ δὲ ἑτέρου θεωρήματος ἡ πρότασις ἥδε· ἐὰν εἰς κύβον κύλινδρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν βάσεις ἔχων πρὸς τοῖς κατεναντίον παραλληλογράμ-

12 ὅς Heiberg : ὃ C || 15 ἀποτεμεῖ Heiberg : ἀποτεμῇ C || 18 δὲ ἐπιφανείας τῆς Heiberg : om. C || 19 δὲ Heiberg : om. C.

tangente aux quatre plans restants, et si on inscrit dans le même cube un autre cylindre, ayant ses bases dans deux autres parallélogrammes et sa surface tangente aux quatre plans restants, la figure comprise entre les surfaces des cylindres et située à l'intérieur des deux cylindres est équivalente aux deux tiers du cube entier. Mais ces théorèmes diffèrent de ceux qui ont été trouvés antérieurement ; car dans ceux-là nous avons comparé les volumes de figures, comme les paraboloïdes, les hyperboloïdes et les ellipsoïdes de révolution, et les segments de ces figures, à des volumes de cônes et de cylindres, mais aucune de ces figures n'a été trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans, alors que chacune de ces figures, comprises entre deux plans et des surfaces cylindriques, est trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans.

Ce sont donc les démonstrations de ces théorèmes que je t'envoie, rédigées dans ce livre.

M'apercevant, comme je l'ai déjà dit, que tu es studieux, que tu domines d'une manière remarquable les questions de philosophie et que tu sais apprécier à sa valeur l'enquête mathématique sur des problèmes nouveaux qui se présentent, j'ai jugé à propos de te décrire, et de développer dans ce même livre, les propriétés caractéristiques d'une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique. Mais je suis persuadé que cet outillage peut servir même pour la démonstration des théorèmes ; certaines propriétés, en effet, qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard par la géométrie, parce qu'une étude faite par cette méthode n'est pas suceptible de démonstrations ;

μοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, ἐγγραφῇ δὲ καὶ ἄλλος κύλινδρος εἰς τὸν αὐτὸν κύβον τὰς μὲν βάσεις ἔχων ἐν ἄλλοις παραλληλογράμμοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, τὸ περιληφθὲν σχῆμα ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κυλίνδρων, ὅ ἐστιν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς κυλίνδροις, δίμοιρόν ἐστι τοῦ ὅλου κύβου. Συμβαίνει δὲ ταῦτα τὰ θεωρήματα διαφέρειν τῶν πρότερον εὑρημένων · ἐκεῖνα μὲν γὰρ τὰ σχήματα, τά τε κωνοειδῆ καὶ σφαιροειδῆ καὶ τὰ τμήματα ⟨αὐτῶν, τῷ μεγέθει σχήμασι⟩ κώνων καὶ κυλίνδρων συνεκρίναμεν, ἐπιπέδοις δὲ περιεχομένῳ στερεῷ σχήματι οὐδὲν αὐτῶν ἴσον ἐὸν εὕρηται, τούτων δὲ τῶν σχημάτων τῶν δυσὶν ἐπιπέδοις καὶ ἐπιφανείαις κυλίνδρων ἕκαστον ἑνὶ τῶν ἐπιπέδοις περιεχομένων στερεῶν σχημάτων ἴσον εὑρίσκεται.

Τούτων δὴ τῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξεις ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἀποστελῶ σοι.

Ὁρῶν δέ σε, καθάπερ λέγω, σπουδαῖον καὶ φιλοσοφίας προεστῶτα ἀξιολόγως καὶ τὴν ἐν τοῖς μαθήμασιν κατὰ τὸ ὑποπίπτον θεωρίαν τετιμηκότα ἐδοκίμασα γράψαι σοι καὶ εἰς τὸ αὐτὸ βιβλίον ἐξορίσαι τρόπου τινὸς ἰδιότητα, καθ' ὅν σοι παρεχόμενον ἔσται λαμβάνειν ἀφορμὰς εἰς τὸ δύνασθαί τινα τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι θεωρεῖν διὰ τῶν μηχανικῶν. Τοῦτο δὲ πέπεισμαι χρήσιμον εἶναι οὐδὲν ἧσσον καὶ εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν τῶν θεωρημάτων. Καὶ γάρ τινα τῶν πρότερόν μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ χωρὶς ἀποδείξεως εἶναι τὴν διὰ τούτου τοῦ τρόπου θεωρίαν · ἑτοιμότερον

2 ἐφαπτομένην Heiberg : ἐφαπτόμενος || 5 ἐφαπτομένην Heiberg : ἐφαπτόμενος || 11 ἐπιπέδοις Heiberg : ἐπιπέδων || 13 ἐπιπέδοις Heiberg : ἐπιπέδῳ || 15 στερεῶν σχημάτων Heiberg : στερεῷ σχήματι || 24 πέπεισμαι : πέπισμαι || 26 τινα τῶν : om. || πρότερον : προτέρων || 28 τούτου add. Reinach.

car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance. Pour cette raison, de ces propositions sur le cône et la pyramide, dont Eudoxe fut le premier à trouver la démonstration, en particulier des théorèmes affirmant que le cône est la troisième partie du cylindre, et la pyramide la troisième partie du prisme, qui ont même base et même hauteur, on doit attribuer une part notable à Démocrite, qui le premier a formulé l'énoncé au sujet de la figure indiquée sans en donner une démonstration. Or il m'arrive que, aussi pour les propositions que je vais exposer maintenant, la découverte m'est venue de la même manière que pour les propositions précédentes ; aussi ai-je voulu rédiger et publier cette méthode, à la fois parce que j'en ai parlé antérieurement[1] et que j'ai voulu éviter de paraître à certains avoir proféré de vaines paroles, et parce que je suis convaincu d'apporter une contribution très utile à la recherche mathématique. Je suis persuadé, en effet, que des chercheurs, soit de notre époque, soit de l'avenir, trouveront, par l'application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me sont pas encore venues à l'esprit.

Je rédige donc en premier lieu la proposition qui fut aussi la première à m'être révélée par la mécanique, à savoir que tout segment de parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur, ensuite une à une les propositions qui ont été examinées de la même manière. La fin du livre sera consacrée aux démonstrations géométriques des théorèmes dont je t'avais envoyé les énoncés antérieurement.

LEMMES

1. Si on retranche une grandeur d'une grandeur, et si le même point est centre de gravité à la fois de

1. Cf. *Quadr. parab.*, fin de la lettre à Dosithée.

γάρ ἐστι προλαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶσίν τινα τῶν ζητημάτων πορίσασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον ἢ μηδενὸς ἐγνωσμένου ζητεῖν. ⟨... Διόπερ καὶ τῶν θεωρη⟩μάτων τούτων, ὧν Εὔδοξος ἐξηύρηκεν πρῶτος τὴν ἀπόδειξιν, περὶ τοῦ κώνου καὶ τῆς πυραμίδος, ὅτι τρίτον μέρος ὁ μὲν κῶνος τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ πυραμὶς τοῦ πρίσματος, τῶν βάσιν ἐχόντων τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, οὐ μικρὰν ἀπονείμαι ἄν τις Δημοκρίτῳ μερίδα πρώτῳ τὴν ἀπόφασιν τὴν περὶ τοῦ εἰρημένου σχήματος χωρὶς ἀποδείξεως ἀποφηναμένῳ. Ἡμῖν δὲ συμβαίνει καὶ τοῦ νῦν ἐκδιδομένου θεωρήματος τὴν εὕρεσιν ὁμοίαν ταῖς πρότερον γεγενῆσθαι· ἠβουλήθην δὲ τὸν τρόπον ἀναγράψας ἐξενεγκεῖν ἅμα μὲν καὶ διὰ τὸ προειρηκέναι ὑπὲρ αὐτοῦ, μή τισιν δοκῶμεν κενὴν φωνὴν καταβεβλῆσθαι, ἅμα δὲ καὶ πεπεισμένος εἰς τὸ μάθημα οὐ μικρὰν ἂν συμβαλέσθαι χρείαν· ὑπολαμβάνω γάρ τινας ἢ τῶν ὄντων ἢ ἐπιγινομένων διὰ τοῦ ἀποδειχθέντος τρόπου καὶ ἄλλα θεωρήματα οὔπω ἡμῖν συνπαραπεπτωκότα εὑρήσειν.

Γράφομεν οὖν πρῶτον τὸ καὶ πρῶτον φανὲν διὰ τῶν μηχανικῶν, ὅτι πᾶν τμῆμα ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστιν τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, μετὰ δὲ τοῦτο ἕκαστον τῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου θεωρηθέντων· ἐπὶ τέλει δὲ τοῦ βιβλίου γράφομεν τὰς γεωμετρι⟨κὰς ἀποδείξεις ἐκείνων τῶν θεωρημάτων, ὧν τὰς προ⟩τάσεις ἀπεστείλαμέν ⟨σοι πρότερον⟩.

ΠΡΟΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ

Ἐὰν ἀπὸ μεγέθους μέγεθος ἀφαιρεθῇ, ⟨τὸ δὲ αὐτὸ σημεῖον κέν⟩τρον τοῦ βάρους ⟨ᾖ τοῦ τε ὅλου⟩ καὶ

4 ὧν : om. C ‖ 8 ἂν : om. ‖ 14 πεπεισμένος Heiberg : πεπεισμένοις C ‖ 15 ἂν : om. ‖ 16 ἐπιγινομένων : ἐπιγεινομένων ‖ 22 τῶν : om. ‖ 24 <κὰς — 25 τὰς προ> suppl. Reinach ‖ 25 <σοι πρότερον> suppl. Reinach ‖ 26 ΠΡΟΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ add. Heiberg.

la grandeur entière et de la grandeur retranchée, ce même point est le centre de gravité de la grandeur qui reste.

2. Si une grandeur est retranchée d'une grandeur sans que le même point soit centre de gravité à la fois de la grandeur entière et de la grandeur retranchée, le centre de gravité de la grandeur restante est situé sur le prolongement de la droite joignant les centres de gravité de la grandeur entière et de la partie retranchée, à l'extrémité d'un segment découpé dont le rapport au segment compris entre les centres de gravité indiqués est égal au rapport entre le poids de la grandeur retranchée au poids de la grandeur restante[1].

3. Si les centres de gravité d'un nombre aussi élevé qu'on voudra de grandeurs sont situés sur la même droite, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera, lui aussi, situé sur la même droite[2].

4. Le centre de gravité de tout segment de droite est le point qui divise le segment en deux parties égales[3].

5. Dans tout triangle le centre de gravité est le point d'intersection des droites menées des sommets du triangle aux milieux des côtés[4].

6. Dans tout parallélogramme le centre de gravité est le point de rencontre des diagonales[5].

7. Le centre de gravité d'un cercle est le centre même du cercle.

8. Dans tout cylindre le centre de gravité est le point qui divise l'axe en deux parties égales.

9. Dans tout prisme le centre de gravité est le point qui divise l'axe en deux parties égales.

10. Dans tout cône le centre de gravité est situé sur l'axe, en un point qui divise l'axe de manière que le segment situé du côté du sommet soit triple du segment restant.

1. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.
2. Cf. *ibid.* I, 4 ; I, 5 ; II, 2.
3-5. Cf. notes complémentaires.

τοῦ ἀφαιρουμένου, ⟨τοῦ⟩ λοιποῦ τὸ αὐτὸ σημεῖον ⟨κέντρον⟩ ἐστὶ τοῦ βάρους.

⟨Ἐὰν ἀπὸ μεγέ⟩θους μέγεθο⟨ς ἀφαιρεθῇ, ᾗ δὲ⟩ μὴ τὸ αὐτὸ σημεῖον κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τε ὅλου μεγέθους καὶ τοῦ ἀφαιρουμένου μεγέθους, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ λοιποῦ μεγέθους ἐπὶ τῆς ⟨εὐθείας⟩ τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰ κέντρα τοῦ βάρους τοῦ τε ὅλου ⟨καὶ τοῦ ἀφαιρουμέ⟩νου ἐκβεβλημένης καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπ' αὐτῆς πρὸς τὴν μεταξὺ τῶν εἰρημένων κέντρων τοῦ βάρους τοῦτον ἐχούσης τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφαιρουμένου μεγέθους πρὸς τὸ [λοιπὸν] βάρος τοῦ λοιποῦ μεγέθους.

Ἐὰν ὁποσωνοῦν μεγεθέων τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ᾖ, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθους τὸ κέντρον ἔσται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Πάσης εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἡ διχοτομία τῆς εὐθείας.

Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ σημεῖον, καθ' ὃ αἱ ἐκ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ἐπὶ μέσας τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι τέμνουσιν ἀλλήλας.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον ἐστὶν ⟨τοῦ βάρους τὸ σημεῖον, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτουσιν.

Κύκλου⟩ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ὃ καὶ ⟨τοῦ κύκλου⟩ ἐστὶ κέντρον.

Παντὸς κυλίνδρου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἡ διχοτομία τοῦ ἄξονος.

Παντὸς πρίσματος τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἡ διχοτομία τοῦ ἄξονος.

Παντὸς κώνου τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους ἐπὶ τοῦ ἄξονος διαιρεθέντος οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τμῆμα τριπλάσιον εἶναι τοῦ λοιποῦ.

10 ἐχούσης Heiberg : ἔχουσα || 11 [λοιπὸν] del. Heiberg.

Nous nous servirons aussi de la proposition suivante, qui figure déjà dans le livre *Sur les conoïdes*[1] : Si des grandeurs en nombre quelconque ont à d'autres grandeurs, en même nombre, prises deux à deux dans le même rang, le même rapport, si les premières grandeurs, soit dans leur totalité, soit en partie, sont dans un rapport quelconque à d'autres grandeurs, et si les grandeurs de la seconde suite ont, prises dans le même ordre, le même rapport à d'autres grandeurs, le rapport entre la somme des premières grandeurs et la somme des grandeurs qui sont en proportion avec elles est égal au rapport entre la somme des grandeurs de la seconde suite et la somme des grandeurs en proportion avec elles[2].

1.

Soit le segment ΑΒΓ compris entre la droite ΑΓ et la parabole ΑΒΓ ; divisons ΑΓ en deux parties égales par le point Δ, menons la parallèle ΔΒΕ au diamètre et les droites ΑΒ et ΒΓ joignant Β à Α et à Γ.

Fig. 121

Je dis que le segment ΑΒΓ est équivalent aux quatre tiers du triangle ΑΒΓ.

1-2. Cf. notes complémentaires.

Χρησόμεθα δὲ καὶ [ἐν τῷ προγεγραμμένῳ Κωνοειδῶν] τῷδε τῷ θεωρήματι· Ἐὰν ὁποσαοῦν μεγέθη ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τὸ πλῆθος κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον τὰ ὁμοίως τεταγμένα, ᾖ δὲ τὰ πρῶτα μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, ἢ τὰ πάντα ἤ τινα αὐτῶν, καὶ τὰ ὕστερον μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις ᾖ, πάντα τὰ πρῶτα μεγέθη πρὸς πάντα τὰ λεγόμενα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει πάντα τὰ ὕστερον πρὸς πάντα τὰ λεγόμενα.

α′.

Ἔστω τμῆμα τὸ ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τῆς ΑΓ καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς τῆς ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΑΓ τῷ Δ, καὶ παρὰ τὴν διάμετρον ἤχθω ἡ ΔΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ.

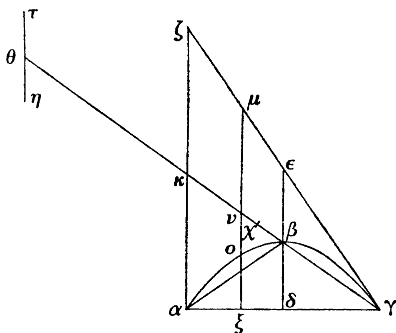


Fig. 121

Λέγω ὅτι ἐπίτριτόν ἐστιν τὸ ΑΒΓ τμῆμα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

1 [ἐν — Κωνοειδῶν] del. Heiberg || 2 τῷ Heiberg : om. || 3 ἴσοις : ἴσα || 4-5 πρὸς ἄλλα μεγέθη suppl. Heiberg || 5 λόγοις : τόποις || 6 ἄλλα μεγέθη suppl. Heiberg || 10 α′ : om.

Menons des points A et Γ la droite AZ parallèle à ΔBE et la droite ΓZ tangente au segment et prolongeons ΓB jusqu'au point K ; soit ΓK égal à KΘ. Imaginons que ΓΘ soit un levier de centre K, et choisissons une parallèle MΞ à EΔ.

Dès lors, comme ΓBA est une parabole[1], que ΓZ est une tangente et que ΓΔ est mené d'une manière ordonnée, EB est égal à BΔ, comme cela a été démontré dans les *Eléments*[2] ; pour cette raison, et parce que ZA et MΞ sont parallèles à EΔ, MN est égal[3] à NΞ et ZK égal à KA. Et comme ΓA est à AΞ comme MΞ est à ΞO, comme cela est démontré dans un lemme[4], que ΓA est à AΞ comme ΓK est à KN, et que, enfin, ΓK est égal à KΘ, le rapport de ΘK à KN est égal au rapport de MΞ à ΞO, Et puisque le point N est le centre de gravité[5] du segment de droite MΞ, parce que MN est égal à NΞ, si nous plaçons le segment de droite TH, égal à ΞO, de manière que son centre de gravité soit le point Θ et que TΘ soit égal à ΘH, le segment de droite TΘH fera équilibre au segment de droite MΞ restant en place, parce que ΘN est coupé en raison inverse des poids TH et MΞ et que ΘK est à KN comme[6] MΞ est à HT ; il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux poids[7] est le point K ; de la même manière aussi toutes les parallèles à EΔ menées dans le triangle ZAΓ feront équilibre, en restant en place, aux segments, découpés d'eux par la parabole et transportés au point Θ de manière que le centre de gravité de la grandeur composée des uns et des autres soit le point K. Et du moment que le triangle ΓZA est constitué par les segments de droite menés dans le triangle ΓZA, et le segment ABΓ constitué par les segments de droite pris dans le segment (sc. de parabole) de la même manière que ΞO, le triangle ZAΓ fera équilibre, en restant en place, au segment de parabole placé autour du centre

1. παραβολή dans le texte grec, mot qui provient d'une interpolation ; Archimède appelle la parabole ὀρθογωνίου κώνου τομά.
2-7. Cf. notes complémentaires.

Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ἡ μὲν ΑΖ παρὰ τὴν ΔΒΕ, ἡ δὲ ΓΖ ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς, καὶ ἐκβεβλήσ⟨θω ἡ ΓΒ ἐπὶ τὸ Κ, καὶ κείσθω τῇ ΓΚ ἴση ἡ ΚΘ⟩. Νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Κ καὶ τῇ ΕΔ παράλληλος τυχοῦσα ἡ ΜΞ.

Ἐπεὶ οὖν παραβολή ἐστιν ἡ ΓΒΑ, καὶ ἐφάπτεται ἡ ΓΖ, καὶ τεταγμένως ἡ ΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΒΔ· τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς στοιχείοις δείκνυται· διὰ δὴ τοῦτο, καὶ διότι παράλληλοί εἰσιν αἱ ΖΑ, ΜΞ τῇ ΕΔ, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ μὲν ΜΝ τῇ ΝΞ, ἡ δὲ ΖΚ τῇ ΚΑ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΞΟ [τοῦτο γὰρ ἐν λήμματι δείκνυται], ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς ΚΝ, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΘ, ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ΚΝ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΞΟ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Ν σημεῖον κέντρον τοῦ βάρους τῆς ΜΞ εὐθείας ἐστίν, ἐπείπερ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ, ἐὰν ἄρα τῇ ΞΟ ἴσην θῶμεν τὴν ΤΗ καὶ κέντρον τοῦ βάρους αὐτῆς τὸ Θ, ὅπως ἴση ᾖ ἡ ΤΘ τῇ ΘΗ, ἰσορροπήσει ἡ ΤΘΗ τῇ ΜΞ αὐτοῦ μενούσῃ διὰ τὸ ἀντιπεπονθότως τετμῆσθαι τὴν ΘΝ τοῖς ΤΗ, ΜΞ βάρεσιν, καὶ ὡς τὴν ΘΚ πρὸς ΚΝ, οὕτως τὴν ΜΞ πρὸς τὴν ΗΤ· ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων βάρους κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ Κ. Ὁμοίως δὲ καὶ ὅσαι ἂν ἀχθῶσιν ἐν τῷ ΖΑΓ τριγώνῳ παράλληλοι τῇ ΕΔ ἰσορροπήσουσιν αὐτοῦ μένουσαι ταῖς ἀπολαμβανομέναις ἀπ' αὐτῶν ὑπὸ τῆς τομῆς μετενεχθείσαις ἐπὶ τὸ ⟨Θ, ὥστε εἶναι τοῦ ἐξ ἀμφοτέ⟩ρων κέντρον τοῦ βάρους τὸ Κ. Καὶ ἐπεὶ ἐκ μὲν τῶν ἐν τῷ ΓΖΑ τριγώνῳ τὸ ΓΖΑ τρίγωνον συνέστηκεν, ἐκ δὲ τῶν ἐν τῇ τομῇ ὁμοίως τῇ ΞΟ λαμβανομένων συνέστηκε τὸ ΑΒΓ τμῆμα, ἰσορροπήσει ἄρα τὸ ΖΑΓ τρίγωνον αὐτοῦ μένον τῷ τμήματι τῆς τομῆς τεθέντι περὶ κέντρον τοῦ βάρους

11 ΓΑ : ΓΔ || ΞΟ : ΞΘ || 11-12 [τοῦτο — δείκνυται] del. Heiberg || 17 ᾖ : om. || 22 ἂν : ἐὰν || 23 ΕΔ : ΗΔ || μένουσαι : μενούσαις || 26 κέντρον : κέντρων || 27 τὸ ΓΖΑ τρίγωνον suppl. Heiberg.

de gravité Θ, l'équilibre se faisant par rapport au point K, de façon que le centre de gravité de la somme des deux grandeurs soit le point K. Divisons dès lors ΓK par le point X de manière que ΓK soit triple de KX ; le point X sera donc le centre de gravité du triangle AZΓ, comme cela a été démontré dans le livre *Des équilibres*[1]. Du moment donc que le triangle ZAΓ, restant en place, fait équilibre, par rapport au point K, au segment BAΓ placé autour du centre de gravité Θ, et que le centre de gravité du triangle ZAΓ est le point X, le rapport du triangle AZΓ au segment ABΓ placé autour du centre Θ est égal au rapport de ΘK à XK. Or ΘK est triple de KX ; il s'ensuit que le triangle AZΓ est à son tour triple du segment ABΓ. Mais le triangle ZAΓ est aussi quadruple du triangle ABΓ, parce que ZK est égal à KA, et AΔ égal[2] à ΔΓ ; par conséquent, le segment ABΓ est équivalent aux quatre tiers du triangle ABΓ.

2.

La proposition qui précède n'est, certes, pas démontrée par ce que nous venons de dire, mais elle donne une certaine idée que la conclusion est vraie ; pour cette raison, voyant que la propriété n'est pas démontrée, mais pressentant que la conclusion est vraie, nous donnerons en son lieu la démonstration géométrique que nous avons trouvée et publiée antérieurement[3].

Toute sphère est quadruple du cône ayant sa base égale au grand cercle de la sphère et une hauteur égale au rayon de la sphère, et le cylindre ayant une base égale au grand cercle d'une sphère et une hauteur égale au diamètre de la sphère est équivalent aux trois demis de la sphère. D'après notre méthode, ces deux propositions s'analysent de la manière que voici :

1. Cf. lemme 5 et *De l'équil. des fig. planes* I, 15.
2-3. Cf. notes complémentaires.

τὸ Θ κατὰ τὸ Κ σημεῖον, ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Κ. Τετμήσθω δὴ ἡ ΓΚ τῷ Χ, ὥστε τριπλασίαν εἶναι τὴν ΓΚ τῆς ΚΧ· ἔσται ἄρα τὸ Χ σημεῖον κέντρον βάρους τοῦ ΑΖΓ τριγώνου· δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς Ἰσορροπικοῖς. Ἐπεὶ οὖν ἰσόρροπον τὸ ΖΑΓ τρίγωνον αὐτοῦ μένον τῷ ΒΑΓ τμήματι κατὰ τὸ Κ τεθέντι περὶ τὸ Θ κέντρον τοῦ βάρους, καί ἐστιν τοῦ ΖΑΓ τριγώνου κέντρον βάρους τὸ Χ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΖΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΓ τμῆμα κείμενον περὶ τὸ Θ κέντρον, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ΧΚ. Τριπλασία δέ ἐστιν ἡ ΘΚ τῆς ΚΧ· τριπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τμήματος· Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΑΓ τρίγωνον τετραπλάσιον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΖΚ τῇ ΚΑ, τὴν δὲ ΑΔ τῇ ΔΓ· ἐπίτριτον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τμῆμα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. [Τοῦτο οὖν φανερόν ἐστιν].

β΄.

Τοῦτο δὴ διὰ μὲν τῶν νῦν εἰρημένων οὐκ ἀποδέδεικται, ἔμφασιν δέ τινα πεποίηκε τὸ συμπέρασμα ἀληθὲς εἶναι· διόπερ ἡμεῖς ὁρῶντες μὲν οὐκ ἀποδεδειγμένον, ὑπονοοῦντες δὲ τὸ συμπέρασμα ἀληθὲς εἶναι, τάξομεν τὴν γεωμετρουμένην ἀπόδειξιν ἐξευρόντες αὐτοὶ τὴν ἐκδοθεῖσαν πρότερον.

Ὅτι δὲ πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶν τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιος τῆς σφαίρας ἐστίν, ὧδε θεωρεῖται κατὰ τρόπον τόνδε·

5 ἐπεὶ : ἔσται || 15 [τοῦτο — ἐστιν] del. Heiberg || 16 β΄ : om. || 23 τετραπλασία : διπλασία.

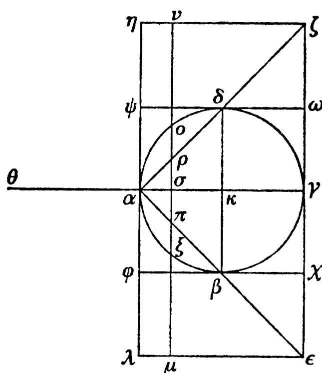


Fig. 122

Soit une sphère, ΑΒΓΔ un grand cercle, et ΑΓ et ΒΔ deux diamètres perpendiculaires l'un à l'autre. Soit, dans cette sphère, un cercle de diamètre ΒΔ, perpendiculaire au (sc. plan du) cercle ΑΒΓΔ. Sur ce cercle perpendiculaire construisons un cône ayant pour sommet le point Α. La surface du cône étant prolongée, coupons le cône par un plan passant par le point Γ et parallèle à la base du cône ; l'intersection sera donc un cercle perpendiculaire à ΑΓ, dont le diamètre sera le segment de droite ΕΖ. Sur ce cercle construisons un cylindre ayant l'axe égal à ΑΓ ; soit ΕΛ et ΖΗ les génératrices du cylindre (sc. situées dans le plan de la figure). Prolongeons ΓΑ et portons sur le prolongement le segment ΑΘ égal à ΑΓ. Imaginons que ΓΘ soit un levier de milieu Α. Menons une parallèle ΜΝ à ΒΔ ; que cette parallèle coupe le cercle ΑΒΓΔ en Ξ et Ο, le diamètre ΑΓ en Σ, la droite ΑΕ en Π, la droite ΑΖ en Ρ. Sur ΜΝ élevons un plan perpendiculaire à ΑΓ ; ce plan coupera le cylindre

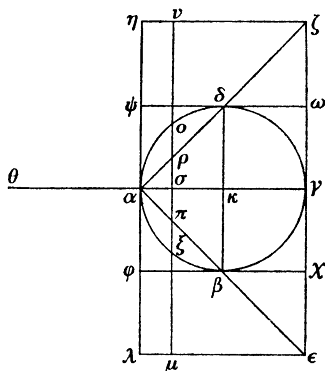


Fig. 122

Ἔστω γάρ τις σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ αἱ ΑΓ, ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις οὖσαι, ἔστω δὲ κύκλος ἐν τῇ σφαίρᾳ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, καὶ ἀπὸ τοῦ ὀρθοῦ κύκλου τούτου κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ Α σημεῖον, καὶ ἐκϐληθείσης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν βάσιν· ⟨ποιήσει δὴ κύκλον ὀρθὸν πρὸς⟩ τὴν ΑΓ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΕΖ. Ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἀναγεγράφθω ἄξονα ἔχων τῇ ΑΓ ἴσον, πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κυλίνδρου αἱ ΕΛ, ΖΗ· καὶ ἐκϐεϐλήσθω ἡ ΓΑ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, καὶ ἤχθω τις παράλληλος ὑπάρχουσα τῇ ΒΔ ἡ ΜΝ, τεμνέτω δὲ αὕτη τὸν μὲν ΑΒΓΔ κύκλον κατὰ τὰ Ξ, Ο, τὴν δὲ ΑΓ διάμετρον κατὰ τὸ Σ, τὴν δὲ ΑΕ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Π, τὴν δὲ ΑΖ κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ εὐθείας ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν ⟨κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΜΝ,

2 οὖσαι : οὔσαις ‖ 4 κύκλου : om. ‖ 12 ζυγὸς : ὁ ζυγός.

suivant un cercle de diamètre MN, la sphère ΑΒΓΔ suivant un cercle de diamètre ΞΟ, le cône ΑΕΖ suivant un cercle de diamètre ΠΡ.

Puisque le rectangle de côtés ΓΑ, ΑΣ est égal au rectangle de côtés ΜΣ, ΣΠ en vertu de l'égalité[1] entre ΑΓ et ΣΜ d'une part, entre ΑΣ et ΠΣ d'autre part, puisque, de plus, le rectangle de côtés ΓΑ et ΑΣ est équivalent[2] au carré sur ΑΞ et, par conséquent, à la somme[3] des carrés sur ΞΣ et sur ΣΠ, le rectangle de côtés ΜΣ, ΣΠ est équivalent à la somme des carrés sur ΞΣ et sur ΣΠ. Puisque, d'autre part, ΓΑ est à ΑΣ comme ΜΣ est à ΣΠ, et que ΓΑ est égal à ΑΘ, le rapport de ΘΑ à ΑΣ est égal au rapport de ΜΣ à ΣΠ et, par conséquent, au rapport du carré sur ΜΣ au rectangle de côtés ΜΣ, ΣΠ ; mais nous avons montré que le rectangle de côtés ΜΣ, ΣΠ est équivalent à la somme des carrés sur ΞΣ et sur ΣΠ ; le rapport de ΑΘ à ΑΣ est donc égal au rapport du carré sur ΜΣ à la somme des carrés sur ΞΣ et sur ΣΠ. Mais le carré sur ΜΣ est à la somme des carrés sur ΞΣ et sur ΣΠ comme[4] le carré sur ΜΝ est à la somme des carrés sur ΞΟ et sur ΠΡ, et ce dernier rapport est égal au rapport du cercle de diamètre ΜΝ, situé dans le cylindre, à la somme des deux cercles dont l'un, situé dans le cône, a pour diamètre ΠΡ, et dont l'autre, situé dans la sphère, a pour diamètre ΞΟ ; il s'ensuit que ΘΑ est à ΑΣ comme le cercle dans le cylindre est à la somme du cercle dans la sphère et du cercle dans le cône. Dans ces conditions, puisque ΘΑ est à ΑΣ comme le cercle dans le cylindre, restant à sa place, est à la somme des deux cercles[5] de diamètres ΞΟ et ΠΡ, déplacés en Θ de manière que Θ soit le centre de gravité de chacun d'eux, ces cercles se feront équilibre par rapport au point Α. On démontrera de la même manière que, si dans le rectangle ΛΖ on mène une autre parallèle à ΕΖ et qu'on élève sur la droite ainsi menée un plan perpendiculaire à ΑΓ, le cercle déterminé dans le cylindre fera équilibre, en restant en place

1-5. Cf. notes complémentaires.

ἐν δὲ τῇ ΑΒΓΔ σφαίρᾳ⟩ κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ ΑΕΖ κώνῳ κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΠΡ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ τῷ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ, ἴση γὰρ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΣΜ, ἡ δὲ ΑΣ τῇ ΠΣ, τῷ δὲ ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΞ, τουτέστιν τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΜΣ, ΣΠ τοῖς ἀπὸ τῶν ΞΣ, ΣΠ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ, ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ. Τῷ δὲ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ ἴσα ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ· ὡς ἄρα ἡ ΑΘ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΟ, ΠΡ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΟ, ΠΡ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς ⟨ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους τόν τε ἐν τῷ κώνῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ,⟩ καὶ τὸν ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ ἐστιν διάμετρος ἡ ΞΟ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ πρὸς τοὺς κύκλους τόν τε ἐν τῇ σφαίρᾳ καὶ τὸν ἐν τῷ κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως αὐτὸς ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ αὐτοῦ μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις, ὧν εἰσιν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετενεχθεῖσιν καὶ τεθεῖσιν οὕτως ἐπὶ τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ, ἰσορροπήσουσι κατὰ τὸ Α σημεῖον. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη ἀχθῇ ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον

2 τῷ : τὸ ‖ διάμετρος : ἡ διάμετρος ‖ 4 τῷ Reinach : τὸ ‖ 5 ὑπὸ : ἀπὸ ‖ 10 Τῷ : τὸ ‖ 13 τὸ : τὰ ‖ 14 τὸ : τὰ ‖ 15 διάμετρος : ἡ διάμετρος ‖ 21 αὐτὸς ὁ : ὁ αὐτὸς ‖ 25 ΛΖ : ΑΓ.

et par rapport au point A, à la somme des deux cercles déterminés dans la sphère et dans le cône et placés sur le levier au point Θ de manière que Θ soit le centre de gravité de chacun des deux. Le cylindre, la sphère et le cône étant ainsi remplis par les cercles ainsi pris, le cylindre, restant en place, fera équilibre autour du point A à la somme de la sphère et du cône, déplacés sur le levier au point Θ de manière que Θ soit le centre de gravité de chacune de ces deux figures. Par conséquent, puisque les solides indiqués se font équilibre autour du point A, le cylindre restant en place autour du centre de gravité[1] K, la sphère et le cône étant déplacés, comme nous venons de le dire, autour du centre de gravité Θ, le cylindre sera à la somme de la sphère et du cône comme[2] ΘA est à AK. Or ΘA est double de AK ; il s'ensuit que le cylindre est équivalent au double de la somme de la sphère et du cône ; mais du cône lui-même le cylindre est triple[3] ; la somme des trois cônes est donc équivalente à la somme de deux de ces mêmes cônes et de deux sphères. Retranchons deux cônes de part et d'autre ; il s'ensuit que le cône admettant AEZ comme triangle passant par l'axe est équivalent à la somme des deux sphères indiquées. Or le cône admettant AEZ comme triangle passant par l'axe est équivalent à la somme de huit cônes[4] admettant comme triangle passant par l'axe le triangle ABΔ, du moment que EZ est double de BΔ La somme des huit cônes indiqués est donc équivalente à la somme des deux sphères. La sphère de grand cercle ABΓΔ est donc équivalente[5] au quadruple du cône ayant pour sommet le point A et pour base le cercle de diamètre BΔ perpendiculaire à AΓ.

Menons maintenant, dans le rectangle ΛZ, par les

1. Cf. lemme 8.
2. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 6 et 7.
3. Cf. Eucl. XII, 10.
4. Cf. Eucl. XII, 12.
5. Cf. *De la sph. et du cyl.* I, 34.

αὐτοῦ μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις τῷ τε ἐν τῇ σφαίρᾳ γινομένῳ καὶ τῷ ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τῶν ληφθέντων κύκλων καὶ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου ἰσορροπήσει ὁ κύλινδρος περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων συναμφοτέροις τῇ τε σφαίρᾳ καὶ τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὰ εἰρημένα στερεὰ κατὰ τὸ Α σημεῖον τοῦ μὲν κυλίνδρου μένοντος περὶ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Κ, τῆς δὲ σφαίρας καὶ τοῦ κώνου μετενηνεγμένων, ὡς εἴρηται, περὶ κέντρον βάρους τὸ Θ, ἔσται ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὴν σφαῖραν καὶ τὸν κῶνον. Διπλασία δὲ ἡ ΘΑ τῆς ΑΚ· διπλασίων ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος συναμφοτέρου τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ κώνου. Αὐτοῦ δὲ τοῦ κώνου τριπλασίων ἐστί· τρεῖς ἄρα κῶνοι ἴσοι εἰσὶ δυσὶ κώνοις τοῖς αὐτοῖς καὶ δυσὶ σφαίραις. Κοινοὶ ἀφῃρήσθωσαν δύο κῶνοι· εἷς ἄρα κῶνος ὁ ἔχων τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΕΖ ἴσος ἐστὶ ταῖς εἰρημέναις δυσὶ σφαίραις. Ὁ δὲ κῶνος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΕΖ, ἴσος ἐστὶν ὀκτὼ κώνοις, ὧν ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ, διὰ τὸ διπλῆν εἶναι τὴν ΕΖ τῆς ΒΔ. Οἱ ἄρα ὀκτὼ κῶνοι οἱ εἰρημένοι ἴσοι εἰσὶ δυσὶ σφαίραις. Τετραπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, τοῦ κώνου, οὗ κορυφὴ μέν ἐστι τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἤχθωσαν δὴ διὰ τῶν Β, Δ σημείων ἐν τῷ ΛΖ παραλλη-

4 τὸ : περὶ τὸ || 11 μένοντος suppl. Heiberg || 15 διπλασίων : διπλάσιον.

points B et Δ les droites ΦBX et ΨΔΩ parallèles à AΓ, et imaginons un cylindre ayant pour bases les cercles de diamètres ΦΨ et XΩ et pour axe le segment AΓ. Puisque, dans ces conditions, le cylindre dont le rectangle passant par l'axe est ΦΩ est double[1] du cylindre dont le rectangle passant par l'axe est ΦΔ, et que ce dernier cylindre est triple[2] du cône dont le triangle passant par l'axe est ABΔ, comme cela a été démontré dans les *Eléments*, le cylindre dont le rectangle passant par l'axe est ΦΩ est sextuple du cône dont le triangle passant par l'axe est ABΔ. Mais nous avons démontré que de ce même cône la sphère de grand cercle ABΓΔ est le quadruple ; le cylindre est donc équivalent aux trois demis de la sphère, ce qu'il fallait démontrer[3].

C'est en considérant cette dernière propriété, à savoir que toute sphère est quadruple du cône ayant pour base le grand cercle et pour hauteur le rayon de la sphère, que j'ai eu l'idée que la surface de toute sphère est quadruple du grand cercle de la sphère[4] ; je supposais, en effet, que, du moment que tout cercle est équivalent à un triangle ayant pour base la circonférence du cercle et pour hauteur le rayon du cercle[5], toute sphère est équivalente à un cône ayant pour base la surface et pour hauteur le rayon de la sphère.

3.

On examine par cette méthode aussi la proposition, d'après laquelle le cylindre ayant une base égale au grand cercle de l'ellipsoïde de révolution et une hauteur égale à l'axe de l'ellipsoïde est équivalent aux trois

1. Cf. Eucl. XII, 14.
2. Cf. Eucl. XII, 10.
3. Cf. *De la sph. et du cyl.* I, 34, coroll.
4. Cf. *ibid.* I, 33.
5. Cf. *Mes. du cercle*, 1.

λογράμμῳ τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΦΒΧ, ΨΔΩ, καὶ νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ διαμέτρους τὰς ΦΨ, ΧΩ κύκλοι, ἄξων δὲ ὁ ΑΓ. Ἐπεὶ οὖν διπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΩ, τοῦ κυλίνδρου, ⟨οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλ⟩ληλόγραμμον τὸ ΦΔ, αὐτὸς δὲ οὗτος τριπλασίων ἐστὶν τοῦ κώνου, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ, ὡς ἐν τοῖς Στοιχείοις, ἑξαπλασίων ἄρα ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΩ, τοῦ κώνου, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ. Ἐδείχθη δὲ τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία οὖσα ἡ σφαῖρα, ἧς μέγιστός ἐστιν κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· ἡμιόλιος ἄρα ὁ κύλινδρος τῆς σφαίρας· ὅπερ ἔδει δειχθῆναι.

Τούτου τεθεωρημένου, διότι πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἡ ἔννοια ἐγένετο ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ· ὑπόληψις γὰρ ἦν καὶ διότι πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καὶ διότι πᾶσα σφαῖρα ἴση ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

γ′.

Θεωρεῖται δὲ διὰ τοῦ τρόπου τούτου ⟨καὶ ὅτι ὁ κύλινδρος ὁ τὴν μὲν βάσιν⟩ ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῷ σφαιροειδεῖ, ὕψος δὲ ἴσον τῷ ἄξονι τοῦ σφαιροειδοῦς,

1 ΦΒΧ, ΨΔΩ : $\overline{\text{φϐ}}$ $\overline{\text{χψ}}$ $\overline{\text{δω}}$ ‖ 1-2 νοείσθω κύλινδρος, οὗ : νοείσθωσαν κύλινδροι ὧν ‖ 3 κύκλοι : κύκλους ‖ 12 ἐστιν : μέν ἐστιν ὁ ‖ 14 Τούτου τεθεωρημένου : τοῦ τοῦ τεθωρήματος ‖ 24 γ′ : om.

demis de l'ellipsoïde ; cette propriété examinée, il devient évident que de tout ellipsoïde coupé par un plan passant par le centre et perpendiculaire à l'axe la moitié est équivalente au double du cône ayant la même base que ce segment et le même axe[1].

Fig. 123

Soit, en effet, un ellipsoïde de révolution ; qu'il soit coupé par un plan passant par l'axe ; soit ΑΒΓΔ l'ellipse déterminée dans sa surface, ΑΓ et ΒΔ ses diamètres, Κ son centre ; soit, dans l'ellipsoïde, le cercle décrit autour de ΒΔ comme diamètre et perpendiculaire à ΑΓ ; imaginons un cône ayant pour base le cercle indiqué et pour sommet le point Α ; sa surface étant prolongée, coupons le cône par un plan poussant par le point Γ et parallèle à la base ; l'intersection du cône avec ce plan sera un cercle perpendiculaire à ΑΓ ayant pour diamètre ΕΖ. Soit aussi un cylindre ayant pour base le même cercle de diamètre ΕΖ et pour hauteur le segment de droite ΑΓ ; portons sur le prolongement de ΓΑ le segment ΑΘ et imaginons que ΘΓ soit un levier de centre Α ; menons dans le

1. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 27.

ἡμιόλιός ἐστι τοῦ σφαιροειδοῦς· τούτου δὲ θεωρηθέντος φανερὸν ὅτι παντὸς σφαιροειδοῦς ἐπιπέδῳ τμηθέντος διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

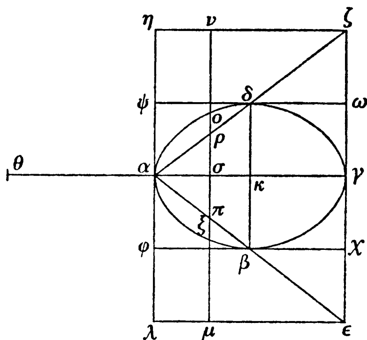


Fig. 123

Ἔστω γάρ τι σφαιροειδὲς καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ γινέσθω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὴ ἡ ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ αὐτῆς ἔστωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Κ, ἔστω δὲ κύκλος ἐν τῷ σφαιροειδεῖ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς πρὸς τὴν ΑΓ, νοείσθω δὲ κῶνος βάσιν ἔχων τὸν εἰρημένον κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν βάσιν· ἔσται δὴ ἡ τομὴ αὐτοῦ κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὴν ΑΓ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΕΖ. Ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν αὐτὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΕΖ, ἄξονα δὲ τὴν ΑΓ εὐθεῖαν, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΓΑ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΘΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α,

3 τὸν : τε τὸν || 15 καὶ : καὶ ὁ || 18 ζυγὸς : ὁ ζυγός.

parallélogramme ΛZ la droite MN parallèle à EZ et élevons sur MN un plan perpendiculaire à AΓ ; dès lors, l'intersection de ce plan avec le cylindre sera un cercle de diamètre MN, son intersection avec l'ellipsoïde[1] sera un cercle de diamètre ΞO, et son intersection avec le cône sera un cercle de diamètre ΠP.

Du moment que ΓA est à AΣ comme[2] EA est à AΠ, c'est-à-dire comme[3] MΣ est à ΣΠ, et que ΓA est égal à AΘ, ΘA sera à AΣ comme MΣ est à ΣΠ. Or MΣ est à ΣΠ comme le carré sur MΣ est au rectangle compris entre MΣ et ΣΠ ; mais le rectangle de côtés MΣ et ΣΠ est équivalent à la somme des carrés sur ΠΣ et sur ΣΞ. Comme, en effet, le rapport du rectangle de côtés AΣ et ΣΓ au carré sur ΣΞ est égal au rapport du rectangle de côtés AK et KΓ, c'est-à-dire du carré sur AK, au carré sur KB — ces deux rapports sont en effet égaux au rapport de l'axe principal au paramètre[4] — et que le rapport du carré sur AK au carré sur KB est égal au rapport du carré sur AΣ au carré sur ΣΠ, par permutation le rapport du carré sur AΣ au rectangle de côtés AZ et ΣΓ sera égal au rapport du carré sur ΠΣ au carré sur ΣΞ. Mais le carré sur AΣ est au rectangle de côtés AΣ et ΣΓ comme[5] le carré sur ΣΠ est au rectangle de côtés ΣΠ et ΠM ; il s'ensuit que le rectangle de côtés MΠ et ΠΣ est équivalent[6] au carré sur ΞΣ. Ajoutons de part et d'autre le carré sur ΠΣ ; le rectangle de côtés MΣ et ΣΠ sera alors équivalent à la somme des carrés sur ΠΣ et sur ΣΞ. Il s'ensuit que le rapport de ΘA à AΣ est égal au rapport du carré sur MΣ à la somme des carrés sur ΠΣ et sur ΣΞ. Mais le rapport du carré sur MΣ à la somme des carrés sur ΣΞ et sur ΣΠ est égal[7] au rapport du cercle, dans le cylindre, de diamètre MN à la somme des deux cercles de diamètres ΞO et ΠP ; par conséquent, le cercle de diamètre MN, restant en place, fera équilibre autour du point A aux deux cercles de diamètres ΞO et ΠP, déplacés et posés sur le levier au point Θ de manière que Θ soit le centre de gravité de chacun d'eux.

1-7. Cf. notes complémentaires.

ἤχθω δέ τις ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΕΖ ἡ ΜΝ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρ⟨θὸν πρὸς τὴν ΑΓ · ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν⟩ μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ τῷ σφαιροειδεῖ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΣ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΠ, τουτέστιν ἡ ΜΣ πρὸς τὴν ΣΠ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ, ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ. Ὡς δὲ ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ · τῷ δὲ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΠΣ, ΣΞ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΣ, ΣΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΚΓ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΑΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ [ἀμφότεροι γὰρ οἱ λόγοι ἐν τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν εἰσίν], ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ, ἐναλλὰξ ἄρα ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΣΓ, τὸ ἀπὸ ΠΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΣΓ, τὸ ἀπὸ ΣΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΣΠ, ΠΜ · ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΠΣ τῷ ἀπὸ ΞΣ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΠΣ · τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ τοῖς ἀπὸ ΠΣ, ΣΞ ἴσον. Ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΠΣ, ΣΞ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΣΞ, ΣΠ, οὕτως ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ · ὥστε ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, αὐτοῦ μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ.

4 κύκλον : om. || 13-14 [ἀμφότεροι — εἰσίν.] del. Heiberg || 21 ΠΣ : $\overline{μσ}$ || 24 ἰσορροπήσει : ἰσορροπήσουσι.

La somme des deux cercles de diamètres ΞΟ et ΠΡ, ainsi déplacés, aura dès lors[1] pour centre de gravité le point Θ ; il s'ensuit que le rapport de ΘΑ à ΑΣ est égal au rapport du cercle de diamètre ΜΝ à la somme des deux cercles de diamètres ΞΟ et ΠΡ. On montrera de la même manière que, si on mène dans le parallélogramme ΛΖ une autre parallèle à ΕΖ et qu'on élève sur la droite ainsi menée un plan perpendiculaire à ΑΓ, le cercle déterminé dans le cylindre, restant en place, fera lui aussi équilibre autour du point Α à la somme des deux cercles déterminés, l'un dans l'ellipsoïde, l'autre dans le cône, déplacés au point Θ du levier de manière que Θ soit le centre de gravité de chacun d'eux. Le cylindre, l'ellipsoïde et le cône étant remplis par les cercles pris ainsi, le cylindre, restant en place, fera donc équilibre autour du point Α à l'ellipsoïde et au cône, déplacés et posés au point Θ du levier de manière que Θ soit le centre de gravité de chacune de ces figures. Le centre de gravité du cylindre[2] est le point Κ, le centre de gravité de l'ellipsoïde et du cône réunis est, comme nous l'avons dit, le point Θ ; le rapport du cylindre à la somme de l'ellipsoïde et du cône est donc égal au rapport de ΘΑ à ΑΚ. Mais ΑΘ est double de ΑΚ ; le cylindre est donc équivalent à la double somme de l'ellipsoïde et du cône, et un cylindre est équivalent à la somme de deux cônes et de deux ellipsoïdes. Or un cylindre est équivalent à trois de ces cônes[3] ; trois cônes sont donc équivalents à la somme de deux cônes et de deux ellipsoïdes. Retranchons de part et d'autre deux cônes ; le cône restant, qui admet comme triangle passant par l'axe le triangle ΑΕΖ, est donc équivalent à deux ellipsoïdes. Mais un de ces cônes est équivalent à huit cônes admet-

1. En substituant, par la pensée, au δὲ des mss., p. 95, l. 1, la particule δὴ ; cf. Heiberg, *op. laud.* II, p. 451.
2. Cf. lemme 8.
3. Cf. Eucl. XII, 10.

Συναμφοτέρων δὲ τῶν κύκλων, ὧν εἰσι διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετενηνεγμένων κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ · καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων συναμφοτέροις τοῖς κύκλοις τῷ τε ἐν τῷ σφαιροειδεῖ γινομένῳ καὶ τῷ ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσιν τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τῶν ληφθέντων κύκλων καὶ τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου ἰσόρροπος ὁ κύλινδρος ἔσται περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων τῷ τε σφαιροειδεῖ καὶ τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Καί ἐστι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Κ, τοῦ δὲ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου συναμφοτέρων, ὡς ἐρρέθη, κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ · ἔστιν οὖν ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, ὁ κύλινδρος πρὸς ἀμφότερα τό τε σφαιρο⟨ειδὲς καὶ τὸν κῶνον⟩. Δ⟨ιπλα⟩σία δὲ ἡ ΑΘ τῆς ΑΚ · διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος ἀμφοτέρων τοῦ τε σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου · εἷς ἄρα κύλινδρος ἴσος δυσὶν κώνοις καὶ δυσὶ σφαιροειδέσιν. Εἷς δὲ κύλινδρος ἴσος ἐστὶ τρισὶ κώνοις τοῖς αὐτοῖς · τρεῖς ἄρα κῶνοι ἴσοι εἰσὶ δυσὶ κώνοις καὶ δυσὶ σφαιροειδέσι. Κοινοὶ ἀφῃρήσθωσαν δύο κῶνοι · λοιπὸς ἄρα εἷς κῶνος, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΕΖ, ἴσος ἐστὶ δυσὶ σφαιροειδέσιν. Εἷς δὲ κῶνος ὁ αὐτὸς ἴσος ἐστὶν ὀκτὼ κώνοις, ὧν ἐστι

8 ὅτι : om. || 10 τῷ sec. : om. || 16 τεθεῖσιν : τεθείσης || 19 τοῦ κώνου : τῷ κώνῳ || 20 συναμφοτέρων : συναμφότερον || 26 τρισὶ : τρεῖς || 27 Κοινοὶ : κώνοις.

tant comme triangle passant par l'axe le triangle ABΔ ; il s'ensuit que huit des cônes indiqués sont équivalents à deux ellipsoïdes et que, par conséquent, quatre de ces cônes sont équivalents à un ellipsoïde ; l'ellipsoïde est donc équivalent au quadruple du cône ayant pour sommet le point A et pour base le cercle de diamètre BΔ perpendiculaire à AΓ, et la moitié de l'ellipsoïde est équivalente au double du cône indiqué.

Menons par les points B et Δ, dans le parallélogramme ΛZ, les parallèles ΦX et ΨΩ à AΓ, et imaginons un cylindre ayant pour bases les cercles de diamètres ΦΨ XΩ et et pour axe le segment de droite AΓ.

Du moment donc que le cylindre, admettant comme parallélogramme passant par l'axe le parallélogramme ΦΩ, est double[1] du cylindre, admettant comme parallélogramme passant par l'axe le parallélogramme ΦΔ, parce que les bases de ces cylindres sont égales et l'axe de l'un double de celui de l'autre, et que le cylindre admettant comme parallélogramme passant par l'axe le parallélogramme ΦΔ est équivalent au triple[2] du cône ayant pour sommet le point A et pour base le cercle de diamètre BΔ perpendiculaire à AΓ, le cylindre admettant comme parallélogramme passant par l'axe le parallélogramme ΦΩ est sextuple du cône indiqué. Mais on a démontré que de ce même cône l'ellipsoïde est quadruple ; par conséquent, le cylindre est équivalent aux trois demis de l'ellipsoïde, ce qu'il fallait démontrer.

4.

Tout segment de paraboloïde découpé par un plan perpendiculaire à l'axe est équivalent aux trois demis du cône ayant même base et même axe que le segment[3] ; en appliquant la même méthode, on examine cette proposition de la manière que voici :

1. Cf. Eucl. XII, 13.
2. Cf. Eucl. XII, 10.
3. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 21.

τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ· ὀκτὼ ἄρα κῶνοι οἱ εἰρημένοι ἴσοι εἰσὶ δυσὶ σφαιροειδέσιν· καὶ τέσσαρες ἄρα κῶνοι ἴσοι ἑνὶ σφαιροειδεῖ· τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ σφαιροειδὲς τοῦ κώνου, οὗ κορυφὴ μέν ἐστι τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς διπλάσιόν ἐστι τοῦ εἰρημένου κώνου.

Ἤχθωσαν δὲ διὰ τῶν Β, Δ σημείων ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΦΧ, ΨΩ, καὶ νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ διαμέτρους τὰς ΦΨ, ΧΩ κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΑΓ εὐθεῖα.

Ἐπεὶ οὖν διπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΩ, τοῦ κυλίνδρου, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΔ, διὰ τὸ ἴσας αὐτῶν εἶναι τὰς βάσεις, τὸν δὲ ἄξονα τοῦ ἄξονος διπλάσιον, αὐτὸς δὲ ὁ κύλινδρος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΔ, τριπλασίων ἐστὶ τοῦ κώνου, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὴν ΑΓ, ἑξαπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΩ, τοῦ εἰρημένου κώνου. Ἐδείχθη δὲ τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλάσιον τὸ σφαιροειδές· ἡμιόλιος ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ σφαιροειδοῦς· $\overline{\text{οι}}$.

δ'.

Ὅτι δὲ πᾶν τμῆμα ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἐπιπέδῳ ἀποτεμνόμενον ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ τὸν ἄξονα τὸν αὐτόν, ὧδε διὰ τοῦ τρόπου τούτου θεωρεῖται.

7 διπλάσιόν : διπλάσιός ‖ 10-11 ΦΨ, ΧΩ : $\overline{\text{φχ}}$ $\overline{\text{ψω}}$ ‖ 11 ἡ : τῇ ‖ εὐθεῖα : εὐθείᾳ ‖ 17 τριπλασίων : τριπλάσιον ‖ 23 $\overline{\text{οι}}$ (hoc est ὅπερ ἔδει δεῖξαι) add. Heiberg ‖ 24 δ' : om. ‖ 25 ὀρθογωνίου : ὀρθογώνιον.

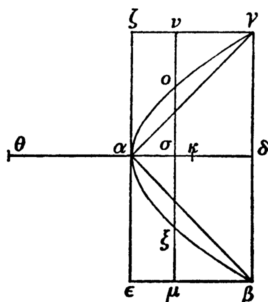


Fig. 124

Soit un paraboloïde ; coupons-le par un plan passant par l'axe ; que la parabole ΑΒΓ soit l'intersection de ce plan avec la surface du paraboloïde[1] ; coupons cette surface par un second plan, perpendiculaire à l'axe ; soit ΒΓ la droite d'intersection des deux plans. Soit ΔΑ l'axe du segment ; prolongeons ΔΑ et prenons sur le prolongement le segment ΑΘ égal à ΑΔ. Imaginons que ΔΘ soit un levier de centre Α. Que la base du segment soit le cercle de diamètre ΒΓ perpendiculaire à ΑΔ. Imaginons le cône ayant pour base le cercle de diamètre ΒΓ et pour sommet le point Α. Soit aussi un cylindre ayant pour base le cercle de diamètre ΒΓ et pour axe le segment de droite ΑΔ. Menons dans le parallélogramme (sc. ΕΒΓΔ) une droite ΜΝ parallèle à ΒΓ, et élevons sur ΜΝ le plan perpendiculaire à ΑΔ. Ce plan aura comme intersection, avec le cylindre un cercle de diamètre ΜΝ, avec le segment de paraboloïde un cercle de diamètre ΞΟ.

Puisque ΒΑΓ est une parabole de diamètre ΑΔ, et que les droites ΞΣ et ΒΔ y sont menées d'une manière

1. Cf. *ibid.* 11.

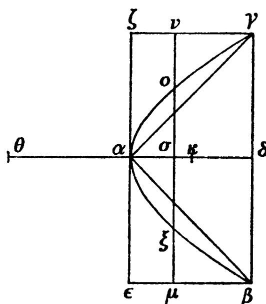


Fig. 124

Ἔστω γὰρ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ὀρθογωνίου κώνου τομὴν τὴν ΑΒΓ, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὴ τομὴ ἡ ΒΓ, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμήματος ἡ ΔΑ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΑ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΔΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἔστω δὲ ἡ τοῦ τμήματος βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΓ κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς ⟨τὴν ΑΔ, νοείσθω δὲ κῶνος βάσιν⟩ μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ ΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΒΓ, ἄξονα δὲ τὸν ΑΔ, καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ ἡ ΜΝ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΔ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθογωνίου κώνου τομή ἐστιν ἡ ΒΑΓ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΑΔ, καὶ τεταγμένως κατηγμέναι

3 ΑΒΓ : $\overline{\alpha\beta}$ || 5 ἔστω : ἔσται || 7 ζυγὸς : ὁ ζυγὸς || 10 κορυφὴν : κορυφή || 19 ἐπεὶ : ἐπὶ || τομή : τομῆς.

ordonnée, le carré sur ΒΔ est au carré sur ΞΣ comme[1] ΔΑ est à ΑΣ ; mais ΔΑ est égal à ΑΘ ; le carré sur ΜΣ est donc au carré sur ΣΞ comme ΘΑ est à ΑΣ. Or le cercle, situé dans le cylindre, de diamètre ΜΝ est au cercle, situé dans le segment de paraboloïde, de diamètre ΞΟ comme le carré sur ΜΣ est au carré sur ΣΞ. Le cercle de diamètre ΜΝ est donc au cercle de diamètre ΞΟ comme[2] ΘΑ est à ΑΣ. Il s'ensuit que le cercle de diamètre ΜΝ situé dans le cylindre fera équilibre autour du point Α, en restant en place, au cercle de diamètre ΞΟ, déplacé et posé sur le levier en Θ de manière que son centre de gravité soit le point Θ. Le centre de gravité du cercle de diamètre ΜΝ est ainsi[3] le pointΣ, le centre de gravité du cercle de diamètre ΞΟ, qui a été déplacé, est le point Θ, et le rapport de ΘΑ à ΑΣ est inverse du rapport du cercle de diamètre ΜΝ au cercle de diamètre ΞΟ. On démontrera de la même manière que, si dans le rectangle ΕΓ on mène une autre parallèle à ΒΓ et qu'on y élève un plan perpendiculaire à ΑΘ, le cercle découpé dans le cylindre fera équilibre autour du point Α, en restant en place, au cercle découpé dans le segment de paraboloïde, déplacé et posé sur le levier au point Θ de manière que son centre de gravité soit le point Θ. Par conséquent, le cylindre et le segment de paraboloïde étant remplis (sc. de cercles obtenus de la manière que nous venons de voir), le cylindre restant en place, fera équilibre autour du point Α au segment de paraboloïde, déplacé et posé sur le levier au point Θ de manière que son centre de gravité soit le point Θ. Mais puisque les grandeurs indiquées se font équilibre autour du point Α, que le centre de gravité du cylindre est le point Κ, par lequel

1. Cf. *Quadr. parab.*, 3.
2. Cf. Eucl. XII, 2.
3. Cf. lemme 7.

εἰσὶν αἱ ΞΣ, ΒΔ, ἔστιν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ. Ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΘ · ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν ἐν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ. Ἰσόρροπος ἄρα ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων τῷ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, μετενεχθέντι καὶ τεθέντι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον αὐτοῦ ⟨εἶναι τοῦ βάρους τὸ⟩ Θ · ⟨καί ἐστι τοῦ⟩ μὲν ⟨κύκλου, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ⟩ ΜΝ, κέντρον τοῦ βάρους τὸ Σ, τοῦ δὲ κύκλου, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ ΞΟ, μετενηνεγμένου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, καὶ ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ ὃν ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῷ ΕΓ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΘ, ὅτι ἰσορροπήσει πρὸς τῷ Α σημείῳ ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ κυλίνδρῳ αὐτοῦ μένων τῷ γενομένῳ ἐν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος μετενεχθέντι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ τμήματος τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύλινδρος αὐτοῦ μένων τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α σημεῖον τὰ εἰρημένα μεγέθη, καί ἐστι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον βάρους τὸ Κ σημεῖον

8 ΞΟ : $\overline{\xi\sigma}$ ‖ 9 περὶ : πρὸς ‖ 18 ἐὰν : ἐν.

le segment de droite ΑΔ est divisé en deux parties égales[1] et que, enfin, le centre de gravité du segment de paraboloïde déplacé est le point Θ, le rapport de ΘΑ à ΑΚ est inverse du rapport du cylindre au segment de paraboloïde. Or ΘΑ est double de ΑΚ ; le cylindre est donc équivalent au double du segment de paraboloïde; mais le même cylindre est triple[2] du cône ayant pour base le cercle de diamètre ΒΓ et pour sommet le point Α. Il est donc évident que le segment de paraboloïde est équivalent aux trois demis de ce même cône.

5.

Dans le segment de paraboloïde découpé par un plan perpendiculaire à l'axe, le centre de gravité est situé sur l'axe du segment, en un point qui divise l'axe indiqué de manière que la partie du côté du sommet soit double de la partie restante. Cette proposition est examinée par notre méthode de la manière que voici :

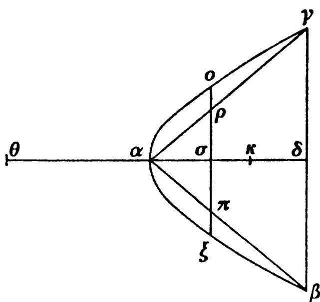


Fig. 125

1. Cf. lemme 8.
2. Cf. Eucl. XII, 10.

δίχα τεμνομένης τῆς ΑΔ κατὰ τὸ Κ σημεῖον, τοῦ δὲ τμήματος μετενηνεγμένου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Θ, ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ⟨ἡ ΘΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὃν ὁ⟩ κύλινδρος πρὸς τὸ τμῆμα. Διπλασία δὲ ἡ ΘΑ τῆς ΑΚ· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ τμήματος. Ὁ δὲ αὐτὸς κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον· δῆλον οὖν ὅτι τὸ τμῆμα ἡμιόλιόν ἐστιν τοῦ αὐτοῦ κώνου.

ε'.

Ὅτι δὲ τοῦ τμήματος τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τοῦ ἀποτεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥ ἐστιν ἄξων τοῦ τμήματος, τμηθείσης οὕτως τῆς εἰρημένης εὐθείας, ὥστε διπλάσιον εἶναι τὸ μέρος αὐτοῦ τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ λοιποῦ τμήματος, ὧδε διὰ τοῦ τρόπου θεωρεῖται·

γ
ο
ρ
θ α σ κ δ
π
ξ
β

Fig. 125

1 δὲ : om. ‖ 7 κορυφὴν : κορυφὴ ‖ 10 ε' : om. ‖ 12 τοῦ : om. | τὸν : τῶν ‖ 15 τὸ alt. : om.

Soit un segment de paraboloïde découpé par un plan perpendiculaire à l'axe ; coupons-le par un second plan, passant par l'axe, qui ait comme intersection avec la surface (sc. du paraboloïde) la parabole ΑΒΓ ; soit ΒΓ la trace du plan sécant dans le plan qui découpe le segment, et ΑΔ l'axe du segment et le diamètre de la parabole ΑΒΓ ; prolongeons ΔΑ et portons sur le prolongement le segment de droite ΑΘ égal à ΔΑ ; imaginons que ΔΘ soit un levier de centre Α ; soit aussi un cône inscrit dans le segment, et ΒΑ et ΑΓ deux de ses génératrices ; menons dans la parabole la parallèle ΞΟ à ΒΓ ; que ΞΟ coupe la parabole aux points Ξ et Ο et les génératrices (sc. indiquées) du cône aux points Π et Ρ.

Du moment donc qu'on a mené dans une parabole les perpendiculaires ΞΣ et ΒΔ au diamètre, le rapport de ΔΑ à ΑΣ est égal[1] au rapport du carré sur ΒΔ au carré sur ΞΣ. Or ΔΑ est à ΑΣ comme[2] ΒΔ est à ΠΣ, et ΒΔ est à ΠΣ comme le carré sur ΒΔ est au rectangle de côtés ΒΔ et ΠΣ ; il s'ensuit que le rapport du carré sur ΒΔ au carré de ΞΣ est lui aussi égal au rapport du carré sur ΒΔ au rectangle de côtés ΒΔ et ΠΣ. Le carré sur ΞΣ est donc équivalent[3] au rectangle de côtés ΒΔ et ΠΣ ; par conséquent, les segments de droite ΒΔ, ΣΞ et ΣΠ sont proportionnels[4], d'où il suit que le rapport de ΒΔ à ΠΣ est égal au rapport du carré sur ΞΣ au carré sur ΣΠ. Mais ΒΔ est à ΠΣ comme ΔΑ est à ΑΣ, c'est-à-dire comme ΘΑ est à ΑΣ ; il s'ensuit que ΘΑ est à ΑΣ comme le carré sur ΞΣ est au carré sur ΣΠ. Élevons dès lors sur ΞΟ un plan perpendiculaire à ΑΔ ; ce plan déterminera donc, dans le segment de paraboloïde le cercle de diamètre ΞΟ, et dans le cône le cercle de diamètre ΠΡ. Et du moment

1. Cf. *Quadr. parab.*, 3.
2. Cf. Eucl. VI, 4.
3. Cf. Eucl. V, 9.
4. Cf. Eucl. VI, 17.

Ἔστω τμῆμα ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἀποτεμνόμενον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἑτέρῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομήν, τοῦ δὲ ἀποτετμηκότος τὸ τμῆμα ἐπιπέδου καὶ τοῦ τέμνοντος κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ ΒΓ, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς ΑΒΓ τομῆς ἡ ΑΔ εὐθεῖα, καὶ τῆς ⟨ΔΑ ἐκβληθείσης ἴση αὐτῇ κείσθω ἡ ΑΘ, καὶ⟩ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΔΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἔστω δὲ καὶ κῶνος ἐγγεγραμμένος ἐν τῷ τμήματι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ αἱ ΒΑ, ΑΓ, ἤχθω δέ τις ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ ἡ ΞΟ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΓ, τεμνέτω δὲ αὕτη τὴν μὲν τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομὴν κατὰ τὰ Ξ, Ο, τὰς δὲ τοῦ κώνου πλευρὰς κατὰ τὰ Π, Ρ σημεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομῇ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὴν διάμετρον αἱ ΞΣ, ΒΔ, ἔστιν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ. Ὡς δὲ ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΠΣ · ἔσται ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔ, ΠΣ. Ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΞΣ τῷ ὑπὸ ΒΔ, ΠΣ · ἀνάλογον ἄρα εἰσὶν αἱ ΒΔ, ΣΞ, ΣΠ, καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ. Ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, τουτέστιν ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ · καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ. Ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τῆς ΞΟ ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΔ · ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ. Καὶ ἐπεί ἐστιν

1 ὀρθογωνίου : ὀρθογώνιον ‖ 5 τέμνοντος : τμήματος. ‖ 21 τῷ : τὸ ‖ 27 δὴ : δὲ..

que ΘA est à AΣ comme le carré sur ΞΣ est au carré sur ΣΠ, et que le carré sur ΞΣ est au carré sur ΣΠ comme[1] le cercle de diamètre ΞO est au cercle de diamètre ΠP, le rapport de ΘA à AΣ sera égal au rapport du cercle de diamètre ΞO au cercle de diamètre ΠP. Le cercle de diamètre ΞO, restant en place, fera donc équilibre autour du point A au cercle de diamètre ΠP, déplacé au point Θ du levier de manière que Θ soit son centre de gravité. Du moment donc que le cercle de diamètre ΞO, restant en place, a pour centre de gravité[2] le point Σ, que le cercle de diamètre ΠP, déplacé de la manière indiquée, a pour centre de gravité le point Θ, et que ΘA est à AΣ dans le rapport inverse du rapport entre le cercle de diamètre ΞO et le cercle de diamètre ΠP, ces cercles se feront équilibre au point A. On démontrera de la même manière que, si on mène dans la parabole une autre parallèle à BΓ et qu'on élève sur la parallèle menée un plan perpendiculaire à AΔ, le cercle, déterminé dans le paraboloïde, restant en place, fera équilibre autour du point A au cercle, déterminé dans le cône, déplacé et posé sur le levier au point Θ de manière que son centre de gravité soit Θ. Le segment et le cône étant ainsi remplis par les cercles, tous les cercles dans le segment, restant en place, feront équilibre autour du point A à tous les cercles dans le cône, déplacés et posés sur le levier au point Θ de manière que leur centre de gravité soit Θ ; le segment de paraboloïde, restant en place, fera donc lui-même équilibre autour du point A au cône, déplacé et posé sur le levier au point Θ de manière

1. Cf. Eucl. XII, 2.
2. Cf. lemme 7.

ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμε⟨τρος ἡ ΠΡ. Ἰσορροπήσει ἄρα πε⟩ρὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, αὐτοῦ μένων τῷ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, μετενεχθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, αὐτοῦ μένοντος κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ Σ, τοῦ δὲ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, μετενεχθέντος ὡς ἐρρέθη κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, καὶ ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, ὃν ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, ἰσορροπήσουσιν ἄρα πρὸς τῷ Α σημείῳ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΔ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος αὐτοῦ μένων ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον τῷ γενομένῳ κύκλῳ ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντων οὖν ὑπὸ τῶν κύκλων τοῦ τε τμήματος καὶ τοῦ κώνου ἰσορροπήσουσι περὶ τὸ Α σημεῖον τεθέντες πάντες οἱ κύκλοι οἱ ἐν τῷ τμήματι αὐτοῦ μένοντες πᾶσι τοῖς κύκλοις τοῖς ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσι τοῦ ζυγοῦ ⟨κατὰ τὸ Θ σημεῖον οὕτως, ὥστε⟩ αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ· ἰσόρροπον οὖν καὶ τὸ τμῆμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένον τῷ κώνῳ μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ

1-2 ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ suppl. Heiberg || 19 κωνοειδέος : κωνοειδέως || 24 πάντες suppl. Heiberg.

que son centre de gravité soit Θ. Puisque, donc, le centre de gravité des deux grandeurs considérées comme une seule[1] est le point A, et que le centre de gravité du cône déplacé est Θ, le centre de gravité de la grandeur restante est situé sur la droite AΘ prolongée du côté de A, à l'extrémité d'un segment de droite AK tel que le rapport de AΘ à AK soit égal[2] au rapport du segment au cône. Mais le segment est équivalent aux trois demis du cône[3]; ΘA est donc égal aux trois demis de AK, et le centre de gravité K du (sc. segment de) paraboloïde est situé au point qui divise AΔ de manière que la partie située du côté du sommet du segment soit double de la partie restante.

6.

Dans tout hémisphère, le centre de gravité est situé sur son axe, en un point qui divise l'axe de manière que le rapport de la partie située du côté de la surface de l'hémisphère à la partie restante soit égal au rapport de cinq à trois.

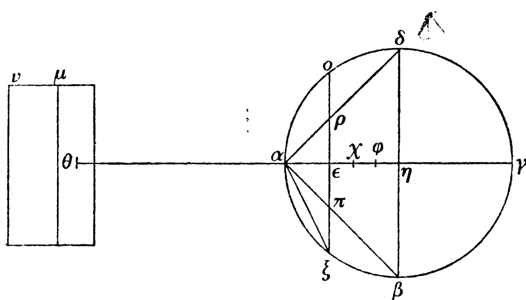


Fig. 126

1. Cf. lemme 3.
2. Cf. lemme 2.
3. Cf. prop. 4.

οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν συναμφοτέρων τῶν μεγεθῶν ὡς ἑνὸς λεγομένων κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ Α, αὐτοῦ δὲ τοῦ κώνου τοῦ μετενηνεγμένου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, τοῦ λοιποῦ ἄρα μεγέθους τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΑΘ εὐθείας ἐκβεβλημένης ἐπὶ τὸ Α καὶ ἀποληφθείσης ἀπ' αὐτῆς τῆς ΑΚ τηλικαύτης, ⟨ὥστε τὴν ΑΘ⟩ πρὸς αὐτὴν τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον. Ἡμιόλιον δέ ἐστιν τὸ τμῆμα τοῦ κώνου· ἡμιόλιος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΑ τῆς ΑΚ, καί ἐστιν τὸ Κ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τῆς ΑΔ τετμημένης οὕτως, ὥστε διπλάσιον εἶναι τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος τοῦ λοιποῦ τμήματος.

ς'.

Παντὸς ἡμισφαιρίου τὸ κέντρον ⟨τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐστίν, ἥ⟩ ἐστιν ἄξων αὐτοῦ, τμηθείσης οὕτως, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἡμισφαιρίου πρὸς τὸ λοιπὸν τμῆμα τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ πέντε πρὸς τὰ τρία.

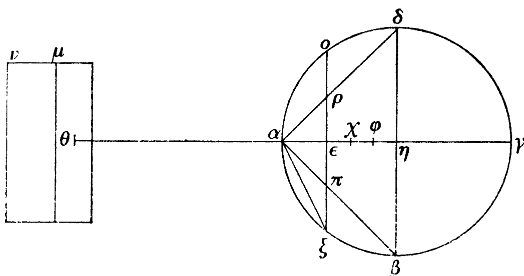


Fig. 126

6 ἀποληφθείσης ἀπ' : ἀποληφθεῖσα || 14 ς' om.

Soit une sphère ; coupons-la par un plan passant par son centre ; que l'intersection de ce plan avec la surface soit le cercle ΑΒΓΔ ; soit ΑΓ et ΒΔ deux diamètres de ce cercle perpendiculaires l'un à l'autre ; élevons sur ΒΔ un plan perpendiculaire à ΑΓ ; soit un cône ayant pour base le cercle de diamètre ΒΔ et pour sommet le point Α, et ΒΑ et ΑΔ deux de ses génératrices ; prolongeons ΓΑ et portons sur le prolongement le segment de droite ΑΘ égal à ΓΑ ; imaginons que ΘΓ soit un levier de centre Α et menons dans le demi-cercle ΒΑΔ la droite ΞΟ parallèle à ΒΔ ; que cette droite coupe la circonférence du demi-cercle aux points Ξ et Ο, les génératrices du cône aux points Π et Ρ, et la droite ΑΓ au point Ε ; sur ΞΟ élevons le plan perpendiculaire à ΑΕ ; ce plan coupera l'hémisphère suivant le cercle de diamètre ΞΟ et le cône suivant le cercle de diamètre ΠΡ.

Comme ΑΓ est à ΑΕ comme[1] le carré sur ΞΑ est au carré sur ΑΕ, que le carré sur ΞΑ est équivalent à la somme des carrés[2] sur ΑΕ et sur ΕΞ, et que ΑΕ est égal[3] à ΕΠ, le rapport de ΑΓ à ΑΕ est égal au rapport de la somme des carrés sur ΞΕ et sur ΕΠ au carré sur ΕΠ. Mais le rapport de la somme des carrés sur ΞΕ et sur ΕΠ au carré sur ΕΠ est égal au rapport de la somme du cercle de diamètre ΞΟ et du cercle de diamètre ΠΡ au cercle de diamètre ΠΡ, et ΓΑ est égal à ΑΘ ; le rapport de ΘΑ à ΑΕ est donc égal au rapport de la somme du cercle de diamètre ΞΟ et du cercle de diamètre ΠΡ au cercle de diamètre ΠΡ. Il s'ensuit que la somme des deux cercles de diamètres ΞΟ et ΠΡ, restant en place, fera équilibre autour du point Α au cercle de diamètre ΠΡ, déplacé et posé au point Θ

1. Cf. Eucl. III, 31 ; V, déf. 9 ; VI, 8.
2. Cf. Eucl. I, 47.
3. Cf. Eucl. VI, 4.

Ἔστω σφαῖρα καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ γενέσθω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὴ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, διάμετροι δὲ ἔστωσαν τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς ΒΔ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἔστω κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κώνου αἱ ΒΑ, ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΑ, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ἡ ΘΓ εὐθεῖα, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ ΒΑΔ ἡμικυκλίῳ ἡ ΞΟ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΔ, τεμνέτω δὲ αὕτη τὴν μὲν τοῦ ἡμικυκλίου περιφέρειαν κατὰ τὰ Ξ, Ο, τὰς δὲ τοῦ κώνου πλευρὰς κατὰ τὰ Π, Ρ σημεῖα, τὴν δὲ ΑΓ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τῆς ΞΟ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΕ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ ἡμισφαιρίῳ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΑΕ, τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τῷ δὲ ἀπὸ ΞΑ ἴσα τὰ ἀπὸ ⟨ΑΕ, ΕΞ, τῇ δὲ ΑΕ ἴση ἡ ΕΠ, ὡς ἄρα ἡ ΑΓ⟩ πρὸς ΑΕ, οὕτως τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΠ. Ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΠ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΞΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ, καί ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ ἴση· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΞΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ. Ἰσορροπήσουσιν ἄρα περὶ τὸ Α σημεῖον ἀμφότεροι οἱ κύκλοι, ὧν εἰσι διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, αὐτοῦ μένοντες τῷ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, μετενεχθέντι καὶ τεθέντι κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον

5 βάσιν : βαβάσιν || 11 τὴν : τῆς || 18 ἀπὸ pr. suppl. Heiberg || 20 τὰ : τὸ || 21-22 τὴν ΞΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον suppl. Heiberg || 24-25 περὶ διάμετρον τὴν ΞΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ suppl. Heiberg || 27 ὧν : om..

de manière que Θ soit son centre de gravité. Du moment donc que de la somme des deux cercles de diamètres ΞΟ et ΠΡ, restant en place, le centre de gravité[1] est le point E, et que Θ est le centre de gravité du cercle de diamètre ΠΡ, déplacé, le rapport de EA à AΘ est égal au rapport du cercle de diamètre ΠΡ à la somme des cercles de diamètres ΞΟ et ΠΡ. De même, si on mène dans la parabole une autre parallèle à la droite BHΔ et qu'on élève sur la droite ainsi menée le plan perpendiculaire à AΓ, la somme des deux cercles déterminés, l'un dans l'hémisphère, l'autre dans le cône, restant en place, fera équilibre autour de A au cercle déterminé dans le cône, déplacé et posé sur le levier au point Θ. Dès lors, l'hémisphère et le cône étant remplis par les cercles, tous les cercles dans l'hémisphère et dans le cône, restant en place, feront équilibre autour du point A à tous les cercles dans le cône, déplacés et posés au point Θ du levier de manière que leur centre de gravité soit Θ ; par conséquent, la somme de l'hémisphère et du cône, restant en place, feront équilibre autour du point A au cône, déplacé et posé au point Θ du levier de manière que son centre de gravité soit Θ. Soit[2] donc un cylindre MN suspendu au point Θ, équivalent au cône ABΔ ; que ce cylindre soit coupé par un plan perpendiculaire à l'axe de manière que le cylindre (sc. partiel) M fasse équilibre au cône autour du point A ; la partie restante, (sc. le cylindre) N, fera donc équilibre à l'hémisphère. Prenons sur AH un point Φ tel que AΦ soit triple de ΦH ; le point Φ sera donc le centre de gravité du cône[3]. Mais prenons aussi un point X tel que AH soit à AX comme huit est à cinq. Du moment donc que le cylindre M fait équilibre au cône ABΔ autour du point A, le rapport du cylindre M au cône ABΔ sera égal au rapport de ΦA à ΘA, c'est-à-dire de trois à huit. Mais le cône ABΔ est équivalent au cylindre MN ; il s'ensuit que le cylindre MN est au cylindre M comme huit

1. Cf. lemme 7.
2-3. Cf. notes complémentaires.

εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν ἀμφοτέρων μὲν τῶν κύκλων, ὧν εἰσι διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, αὐτοῦ μενόντων κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ⟨τὸ Ε, τοῦ δὲ κύκλου, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ ΠΡ, μετενεχθέντος τὸ Θ, ἔστιν ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, πρὸς τοὺς κύκλους, ὧν διάμετροι αἱ⟩ ΞΟ, ⟨ΠΡ. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ παράλληλος τῇ⟩ Β⟨Η⟩Δ, καὶ ⟨ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀναστα⟩θῇ ὀρθὸν πρὸς ⟨τὴν ΑΓ⟩, ἰσορροπ⟨ήσουσιν⟩ περὶ τὸ Α ⟨σημεῖον⟩ ἀμφότερ⟨οι οἱ κύκλοι ὅ τε ἐν τῷ ἡμισφαιρίῳ γενό⟩μεν⟨ος⟩ κ⟨αὶ ὁ ἐν τῷ κών⟩ῳ αὐ⟨τοῦ μένοντες τῷ γ⟩ενομένῳ ⟨κύκλῳ ἐν τῷ κώνῳ⟩ μετενεχθέντι ⟨καὶ⟩ τε⟨θέντι τοῦ⟩ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ. ⟨Συμπληρωθέντων οὖν ὑπὸ τῶν κύκλων τοῦ τε⟩ ἡμισφαιρίου καὶ τοῦ κώ⟨νου⟩ ἰσορ⟨ροπήσουσι περὶ τὸ Α σημεῖον πάντες οἱ κύκλο οἱ ἐν τῷ ἡμισφαι⟩ρίῳ καὶ οἱ ⟨ἐν τῷ κώνῳ αὐτοῦ⟩ μένοντες ⟨πᾶσι τοῖς κύκλοις τοῖς ἐν⟩ τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον ⟨εἶναι αὐτῶν⟩ τοῦ βάρους τὸ Θ· ⟨ὥστε ἰσορροπήσουσι περὶ τὸ Α σημεῖον τό τε ἡμισφαίριον καὶ ὁ κῶνος αὐτοῦ⟩ μένοντα τῷ κώνῳ μετενεχθέντι καὶ τεθέντι ⟨τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ⟩ οὕτως, ὥστε κέν⟨τρον⟩ αὐτοῦ ⟨εἶναι τοῦ βάρους⟩ τὸ Θ σημεῖον .... δ .... ἔλασσον

....

....

.... τῶν δὲ ..... ⟨ἰσορροπ⟩ού⟨ντ⟩ων κατὰ τὸ ⟨Α⟩ .... τρ ...... τὸ ..... ⟨καὶ ἐπεί⟩ ἐστιν,

2 ὧν : om || 21 μένοντα : μένοντας.

est à trois et que, par conséquent, le cylindre N est au cylindre MN comme cinq est à huit[1], ou que le cône ABΔ est au cylindre N comme huit est à cinq, c'est-à-dire comme AH est à AX. Et comme la sphère est équivalente au quadruple[2] du cône ayant pour base le cercle de diamètre BΔ et pour axe AH, le rapport de l'hémisphère au cône ABΔ sera égal au rapport de deux à un, c'est-à-dire de AΘ à AH. Par identité[3] donc, le rapport de l'hémisphère au cylindre N est égal au rapport de AΘ à AX. De plus, le cylindre N, de centre de gravité Θ, fait équilibre à l'hémisphère autour du point A ; il s'ensuit que le centre de gravité de l'hémisphère est le point X qui divise l'axe de manière que la partie située du côté de la surface de l'hémisphère ait à la partie restante le rapport de cinq à trois.

7.

Cette méthode s'applique aussi à la proposition suivante : Le rapport de tout segment de sphère au cône ayant la même base et le même axe que le segment est égal au rapport entre la somme du rayon de la sphère

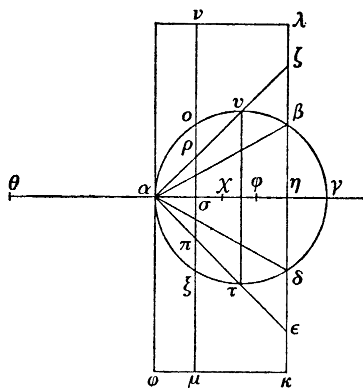


Fig. 127

1-3. Cf. notes complémentaires.

ὡς ἡ Θ⟨Α πρὸς⟩ΑΧ, ... ἄξων ὁ ΑΗ .. τὰ .... μον .... ⟨ση⟩μεῖ⟨ον⟩ .... κῶνον τοῖ⟨ς⟩ ...... τοῦ κώνου .... καὶ ἐπεὶ τετρα⟨πλασία ἐστὶν⟩ ἡ σφαῖρα τοῦ ⟨κώνου, οὗ βάσις ὁ⟩ περὶ ⟨διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, ἄξων δὲ ἡ ΑΗ⟩ ....

....

....

ζ′.

Θεωρεῖται ⟨δὲ⟩ διὰ τοῦ ⟨τρόπου τού⟩του καὶ ὅτι π⟨ᾶν τμῆμα⟩ σφαίρας πρὸς τὸν κῶνον ⟨τὸν βάσιν⟩ ἔχοντα τὴν αὐ⟨τὴν τῷ τμήματι⟩ καὶ ἄξονα ⟨τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος

Fig. 127

9 ζ′ : om.

et de la hauteur du segment restant, d'une part, et la hauteur du segment restant d'autre part[1].

Soit[2], en effet, une sphère, ΑΒΓΔ un grand cercle, ΑΓ et ΤΥ deux diamètres perpendiculaires ; coupons la sphère par un plan perpendiculaire à ΑΓ, découpant un segment ayant pour base le cercle de diamètre ΒΔ ; soit Η le point d'intersection entre ΒΔ et ΑΓ ; construisons sur ce cercle (sc. comme base) un cône de sommet Α. Construisons en outre sur le cercle de diamètre ΤΥ un cône ayant le même sommet et prolongeons sa surface ; que l'intersection de ce cône avec le plan mené par ΒΔ soit le cercle de diamètre ΕΖ ; décrivons dans le même plan autour de Η comme centre et avec un rayon égal à ΑΓ le cercle de diamètre ΚΛ, et construisons sur ce cercle un cylindre ayant pour axe ΑΗ et admettant comme parallélogramme passant par l'axe le parallélogramme ΦΛ. Prolongeons ΑΓ des deux côtés, et portons sur le prolongement, d'un côté ΓΩ égal au rayon de la sphère, de l'autre côté ΑΘ égal à ΑΓ ; imaginons que ΓΘ soit un levier de centre Α.

Menons dès lors dans le parallélogramme ΦΔ la droite ΜΝ parallèle à ΒΔ et élevons sur ΜΝ le plan perpendiculaire à ΑΓ ; ce plan coupera le cylindre suivant le cercle de diamètre ΜΝ, le segment de sphère suivant le cercle de diamètre ΞΟ, et le cône ayant pour base le cercle de diamètre ΕΖ et pour sommet le point Α suivant le cercle de diamètre ΠΡ. Dans ces conditions, on montrera comme précédemment que le cercle de diamètre ΜΝ, restant en place, fera équilibre autour du point Α à la somme des deux cercles de diamètres ΞΟ et ΠΡ, déplacés et posés sur le levier au point Θ de manière que le point Θ soit le centre de gravité de chacun d'eux ; mais on ferait le même raisonnement pour tous les cercles. Le cylindre, le cône et le segment de sphère étant remplis par les cercles, le cylindre, restant en place, fera donc à son tour équilibre à la

1-2. Cf. notes complémentaires.

πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος〉..................
.... τω ....
.... ὀρθὴ .... τὸ αὐτὸ ....
....
.... παρὰ ....
.... 〈καὶ ἀπὸ τῆς〉 ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλον, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, κύκλον, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ ΠΡ. Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἰσόρροπος περὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, αὐτοῦ μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύ〈κλοις, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετεν〉εχθεῖσι τοῦ ζυγοῦ 〈κατὰ τὸ Θ,〉 ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον 〈τοῦ βάρους εἶναι τὸ Θ· ὁμοίως〉 δὲ 〈ἐπὶ πάντων〉. Συμπληρωθέντων οὖν καὶ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ 〈κώνου καὶ τοῦ〉 τμήματος 〈τῆς σφαίρας ὑπὸ τῶν κύκλων ἰσορροπήσει καὶ〉 ὁ κύλινδρος αὐτοῦ μένων

10 κύκλος : κύκλον ‖ 12 ἰσόρροπος : ἰσόρροπον.

somme du cône et du segment de sphère, déplacés et posés sur le levier au point Θ. Divisons AH par les points Φ et X de manière que AX soit égal à XH et que HΦ soit égal au tiers de AH ; le cylindre aura alors pour centre de gravité le point[1] X comme étant le milieu de l'axe AH. Du moment donc que les grandeurs indiquées se font équilibre autour du point A, le rapport du cylindre à la somme du cône, dont la base a pour diamètre EZ, et du segment de sphère BAΔ est égal au rapport de ΘA à AX. Comme, d'autre part, HA est triple de HΦ, le rectangle de côtés ΓH et HΦ est équivalent au tiers du rectangle de côtés AH, HΓ. Or le rectangle de côtés AH et HΓ est équivalent[2] au carré sur HB ; il s'ensuit que le rectangle de côtés ΓH et HΦ est aussi équivalent au tiers du carré sur BH. Le carré sur AH est, d'autre part, équivalent au triple du rectangle de côtés AH et HΦ, c'est-à-dire au triple du rectangle de côtés AX et AΦ, parce que AH est double de AX, et AΦ double de ΦH. De plus[3], puisque ΘA est égal à KH et AH égal à HE, le rapport du carré sur ΘA au tiers du carré sur AH sera égal au rapport du cylindre, ayant pour base le cercle de diamètre KΛ, au cône AEZ. En outre, le rapport du carré sur ΘA au tiers du carré sur AH est égal au rapport du carré sur ΘA au rectangle de côtés AX et AΦ ; il s'ensuit que le rapport du carré sur ΦA au rectangle de côtés AX et AΦ est égal au rapport du cylindre au cône. Mais nous avons aussi démontré que le rapport entre le cylindre, ayant pour base le cercle de diamètre KΛ, et la somme du segment de sphère ABΔ et du cône est égal au rapport de ΘA à AX ; de plus[3], ΘA est égal à AΓ, c'est-à-dire égal à la somme de AΦ et de ΦΓ ; il s'ensuit que le rapport entre le carré sur ΘA et la somme des rectangles de côtés

1. Cf. lemme 8.
2. Cf. Eucl. VI, 8, coroll. ; VI, 17.
3. Raisonnement reconstitué par Heiberg.

συναμφοτέροις τῷ τε κώνῳ καὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας μετενηνεγμένοις καὶ κειμένοις τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ. Τεμνέσθω δὲ ἡ ΑΗ κατὰ τὰ Φ, Χ σημεῖα οὕτως ὥστε τὴν μὲν ΑΧ εἶναι ἴσην τῇ ΧΗ, τὴν δὲ ΗΦ τρίτον μέρος τῆς ΑΗ· ἔσται δὴ τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ διὰ τὸ διχοτομίαν εἶναι τοῦ ΑΗ ἄξονος. Ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α σημεῖον τὰ εἰρημένα μεγέθη, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς ἀμφότερον τόν τε κῶνον, οὗ διάμετρος τῆς βάσεως ἡ ΕΖ, καὶ τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΧ. Καὶ ἐπεὶ ⟨τριπλ⟩ασία ἐστὶν ἡ ΗΑ τῆς ΗΦ, τρίτον μέρος ἐστὶν ⟨τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΦ τοῦ ὑπὸ ΑΗ, ΗΓ. Ἴσον δὲ⟩ τῷ ὑπὸ ΑΗ, ΗΓ τὸ ἀπὸ ΗΒ· ἔσται δὴ καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΗ τρίτον μέρος τὸ ὑπὸ ΓΗ, ⟨ΗΦ⟩ . . . . ὑπὸ ΗΓ . . . τὸ δὲ ἀπὸ ΑΗ . . . . ὑπὸ ΗΓ . . . . τῆς . . . . ΚΛ . . . . τρον . . . . οὕτως ⟨ὁ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ⟩ διάμετρον ⟨τὴν.. κύκλος⟩ πρὸς τὸν . . . . ⟨ὁ κύλινδρος, οὗ⟩ βάσις ⟨. . . . ὁ περὶ⟩ διάμετρον τὴν ΚΛ κύκλος πρὸς τὸν ΑΕΖ κῶνον. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΑ πρὸς . . . . ἄρα ἡ . . . . πρὸς τὸν κῶνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ⟨ὡς ἡ ΘΑ⟩ πρὸς ΑΧ, οὕτως ὁ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρ⟨ον⟩ τὴν ΚΛ κύκλος ⟨πρὸς τὸ⟩ τμῆμα ⟨τῆς σφαίρας τὸ ΑΒΔ καὶ τὸν⟩ κῶνον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς συναμφοτέρας τὰς . . . . Φ. . . . . τὸ ΑΒΔ ⟨τμῆμα τῆς σ⟩φαίρ⟨ας⟩ . . . τα . . . . καὶ . . . . ὅ τε . . . . ὡς τὸ ΑΒΔ τμῆμα πρὸς τὸν κύλινδρον, οὗ ἐστι βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν . . κύκ⟨λος⟩, ἄξων ⟨δὲ ὁ⟩ α⟨ὐτός, οὕτως⟩

3 ΑΗ : ΑΓ ‖ 8-9 οὗ διάμετρος τῆς βάσεως suppl. Heiberg ‖ 11 ΗΦ : ΑΦ ‖ 12 ΗΓ τὸ ἀπὸ suppl. Heiberg ‖ 23 οὗ βάσις suppl. Heiberg ‖ 25 ὡς : : om.

ΑΦ, ΑΧ et ΦΓ, ΑΧ est égal au rapport du cylindre à la somme du segment ΑΒΔ et du cône ΑΕΖ. Le rapport du cylindre au segment de sphère sera donc égal au rapport du carré sur ΘΑ au rectangle de côtés ΦΓ et ΑΧ. Mais le rapport du cylindre au cône ΑΒΔ est égal au rapport du carré sur ΘΑ au tiers du carré sur ΒΗ, et ce dernier rapport est égal au rapport du carré sur ΘΑ au rectangle de côtés ΓΗ et ΗΦ ; il s'ensuit que le rapport du segment ΑΒΔ au cône ΑΒΔ est égal au rapport du rectangle de côtés ΦΓ et ΑΧ au rectangle de côtés ΓΗ et ΗΦ. Et comme ΑΗ est égal au double de ΑΧ, à la somme de ΑΦ et de ΦΗ, et au triple de ΦΗ, et que ΦΓ est égal à la somme de ΦΗ et de ΗΓ et à la somme du tiers de ΑΗ et de ΗΓ, le rectangle de côtés ΦΓ et ΑΧ sera équivalent à la somme du rectangle ayant pour côtés le tiers de ΑΗ et les trois demis de ΦΗ et du rectangle ayant pour côtés ΗΓ et les trois demis de ΦΗ ; cette dernière somme étant équivalente au rectangle ayant pour côtés ΦΗ et la somme de la moitié de ΑΓ et de ΗΓ et, par conséquent, équivalente au rectangle de côtés ΦΗ et ΗΩ, le rapport du segment ΑΒΔ au cône ΑΒΔ est égal au rapport de ΗΩ à ΗΓ.

8.

De la même manière la méthode s'applique aussi dans le théorème que voici : le rapport de tout segment d'ellipsoïde, découpé par un plan perpendiculaire, au cône ayant même base et même axe que le segment est égal au rapport entre la somme de la moitié de l'axe de l'ellipsoïde et de l'axe du segment opposé, d'une part, et l'axe du segment opposé, d'autre part[1].

9.

Dans tout segment de sphère, le centre de gravité est situé sur l'axe du segment, en un point qui divise

1. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 29 et 31.

. . . . Χ πρὸς . . . . ὡ⟨ς δὲ ὁ⟩ κύλινδρος, οὗ βάσις ⟨ὁ περὶ διάμετρον⟩ τὴν Κ⟨Λ κύκλος, πρὸς τὸν⟩ ΑΒΔ κῶνον, ⟨οὕτως⟩ . . . . τω . . . . πρὸς . . Β . . . . η . Φ . . . . ὡς ἡ . . . . ἡ Α. Τῇ . . . . καὶ ἡ ΗΓ καὶ . . . . . .

η′.

⟨Ὁμοίως δὲ θεωρεῖτ⟩αι διὰ τοῦ ⟨αὐτοῦ τρόπου καὶ ὅτι⟩ πᾶν τμῆμα ⟨σφαιροειδέος⟩ ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος ἥ τε ἡμίσεια τοῦ ἄξονος τοῦ ⟨σ⟩φαιρο⟨ειδέος⟩ καὶ ⟨τοῦ ἄξονος⟩ τοῦ ⟨ἀντι⟩κειμένου ⟨τμήματος⟩ πρὸ⟨ς τὸν ἄξονα τοῦ ἀντικειμένου τμήματος⟩.

θ′.

⟨Παντὸς τμήματος σφαίρας τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥ ἐστιν ἄξων τοῦ τμήματος, διῃρη-

1 οὗ : οὗ ἡ || 7 η′ : om. || 15 θ′ : om.

l'axe de manière que le rapport de la partie du côté du sommet du segment à la partie restante soit égal au rapport entre la somme de l'axe du segment et du quadruple de l'axe du segment opposé, d'une part, et la somme de l'axe du segment et du double de l'axe du segment opposé.

Soit[1] une sphère ; découpons-en un segment par un plan perpendiculaire ; que l'intersection de la sphère avec un autre plan, passant par son centre, soit le cercle ΑΒΓΔ ; soit ΒΔ la trace du plan sécant dans le plan découpant le segment, ΓΑ le diamètre perpendiculaire à ΒΔ, Η le point d'intersection de ΓΑ et de ΒΔ ; le segment de sommet Α aura ainsi pour axe ΑΗ, et l'axe du segment opposé sera ΗΓ. Coupons ΑΗ par le point Χ de manière que le rapport de ΑΧ à ΧΗ soit égal au rapport de la somme de ΑΗ et du quadruple de ΗΓ à la somme de ΑΗ et du double de ΗΓ. Je dis que le centre de gravité du segment de sommet Α est le point Χ...[2]......................
...prolongeons ΑΓ (sc. des deux côtés) et portons sur le prolongement, d'un côté ΑΘ, égal à ΑΓ, de l'autre

Fig. 128

1. Trois lignes du raisonnement reconstituées par Heiberg d'après la prop. 10.

2. Il a été impossible jusqu'à présent de combler cette lacune.

μένης οὕτως ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος πρὸς τὸ λοιπὸν τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον ὅ τε ἄξων τοῦ τμήματος καὶ ἡ τετραπλασία τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι πρὸς συναμφότερον τόν τε ἄξονα τοῦ τμήματος καὶ τὴν διπλασίαν τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι ἐμπεριεχομένου.⟩ . . . . ⟨τοῦ δὲ ἀποτε⟩τμηκότος ⟨τὸ τμῆμα ἐπιπέδου ἡ ΒΔ, ἡ δὲ⟩ ΓΑ εὐθεῖα διά⟨με⟩τρ⟨ος ἔστω ὀρθὴ πρὸς τὴν⟩ ΒΔ καὶ τετμή⟨σθω κ⟩ατ⟨ὰ τὸ Η σημεῖον· ὥ⟩στε τοῦ τμήμ⟨ατος, οὗ κορυ⟩φὴ τὸ Α σημεῖον, ἄξων ⟨ἔσται ἡ ΑΗ,⟩ τ⟨οῦ δ⟩ὲ ἀντικειμέν⟨ου ἄξων ἡ Η⟩Γ. Τετμήσθω δὲ ἡ ΑΗ κατὰ ⟨τὸ Χ, ὥστε⟩ εἶναι ὡς τὴν ⟨Α⟩Χ πρὸς ΧΗ, ⟨οὕτως τήν τε ΑΗ καὶ τὴν⟩ τετρα⟨πλασί⟩αν τῆς ΗΓ πρὸς τὴν ΑΗ καὶ τὴν διπλασίαν ⟨τῆς ΗΓ. Λ⟩έγω ὅτι ⟨τοῦ τ⟩μ⟨ήματος, οὗ⟩ κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, ⟨κ⟩έντρ⟨ον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ⟩ Χ . . . . φοτέροις . . . . τμημ . . ., οὗ κορυ⟨φὴ⟩ . . . σημεῖον . . . . . . ΗΑ . . ἐχ . . . . τὴν Η. Λόγον . . . . κέντρον . . . . Χ. εἰ . . τμήθη . . . ρ . . . . χηματ . . μει . . . . ω . . . ἐν δὴ . . . τερ . . . . καὶ ἐκβεβλήσθω

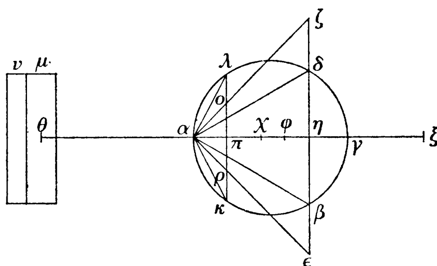


Fig. 128

15-16 τῆς ΗΓ πρὸς τὴν ΑΗ καὶ τὴν διπλασίαν suppl. Heiberg.

côté ΓΞ, égal au rayon de la sphère ; imaginons que ΓΘ soit un levier de centre A et décrivons, dans le plan découpant le segment, un cercle autour de H comme centre et avec un rayon égal à AH ; sur ce cercle construisons un cône de sommet A ; soit AE et AZ les génératrices de ce cône (sc. situées dans le plan sécant). Menons la parallèle ΚΛ à EZ, et soit K et Λ ses points d'intersection avec la circonférence du segment, P et O ses points d'intersection avec les génératrices du cône AEZ, et Π son point d'intersection avec ΑΓ. Dès lors, comme ΑΓ est à ΑΠ comme[1] le carré sur KA est au carré sur ΑΠ, que le carré sur KA est équivalent[2] à la somme des carrés sur ΑΠ et sur ΠΚ, que le carré sur ΑΠ est égal au carré sur ΠΟ, que, de plus, le carré sur AH est égal au carré sur EH, le rapport de ΓΑ à ΑΠ est égal au rapport de la somme des carrés sur ΚΠ et sur ΠΟ au carré sur ΟΠ. Mais le rapport de la somme des carrés sur ΚΠ et sur ΠΟ au carré ΠΟ est égal au rapport du cercle de diamètre ΚΛ augmenté du cercle de diamètre OP au cercle de diamètre OP, et ΓΑ est égal à ΑΘ ; il s'ensuit que le rapport de ΘΑ à ΑΠ est égal au rapport de la somme des deux cercles de diamètres ΚΛ et OP au cercle de diamètre OP. Du moment donc que le rapport de la somme des cercles de diamètres ΚΛ et OP au cercle de diamètre OP est égal au rapport de ΑΘ à ΠΑ, déplaçons le cercle de diamètre OP et posons-le sur le levier au point Θ de manière que Θ soit son centre de gravité ; alors le rapport de ΘΑ à ΑΠ sera égal au rapport de la somme des cercles de diamètres ΚΛ et OP, restant en place, au cercle de diamètre OP, déplacé et posé sur le levier au point Θ de manière que Θ soit son centre de gravité ; les deux cercles, celui qui est dans le segment ΒΑΔ et celui qui est dans le cône AEZ feront par conséquent équilibre autour du point A au cercle dans le cône

1. Cf. Eucl. III, 31 ; VI, 8, coroll. ; V, déf. 9.
2. Cf. Eucl. I, 47.

ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἴση ἡ ΓΞ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ἡ ΓΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, γεγράφθω δὲ καὶ κύκλος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ἀποτέμνοντι τὸ τμῆμα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΑΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου ⟨γεγράφθω κῶνος κορυφὴν ἔχων τὸ Α σημεῖον,⟩ πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κώνου αἱ ΑΕ, ΑΖ, καὶ ἤχθω τις τῇ ΕΖ παράλληλος ἡ ΚΛ καὶ συμβαλλέτω τῇ μὲν περιφερείᾳ τοῦ τμήματος κατὰ τὰ Κ, Λ, ταῖς δὲ τοῦ ΑΕΖ κώνου πλευραῖς κατὰ τὰ Ρ, Ο, τῇ δὲ ΑΓ κατὰ τὸ Π. Ἐπεὶ δή ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΑΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ ΚΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΠ, ΠΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΠ τὸ ἀπὸ ΠΟ, ἐπεὶ καὶ τῷ ἀπὸ ΑΗ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἐστὶν ἴσον, ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς ΑΠ, οὕτως τὰ ἀπὸ ΚΠ, ΠΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΠ. Ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΚΠ, ΠΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΠ, οὕτως ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὴν ΟΡ. Ἐπεὶ οὖν ὡς οἱ περὶ διαμέτρους τὰς ΚΛ, ΟΡ κύκλοι πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΠΑ, μετακείσθω ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ κύκλος καὶ κείσθω τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΠ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ αὐτοῦ μένοντες πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ μετενεχθέντα καὶ τεθέντα τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ· ἰσόρροποι ἄρα οἱ κύκλοι ὅ τε ἐν τῷ τμήματι τῷ ΒΑΔ καὶ ὁ ἐν τῷ ΑΕΖ ⟨κώνῳ τῷ ἐν τῷ ΑΕΖ κώνῳ περὶ⟩

2 ἡ ΓΘ, : τὸ ‖ 9 ΑΕΖ : ΑΕΑΖ ‖ 10 Π : Η ‖ 19 ὁ pr. : om.

AEZ. De la même manière tous les cercles dans le segment BAΔ et dans le cône AEZ, restant en place, feront équilibre autour du point A à tous les cercles dans le cône AEZ, déplacés et posés sur le levier au point Θ de manière que Θ soit leur centre de gravité ; il s'ensuit que la somme du segment de sphère ABΔ et du cône AEZ, ces figures restant en place, fera à son tour équilibre autour du point A au cône EAZ, déplacé et posé sur le levier au point Θ de manière que Θ soit son centre de gravité. Soit un cylindre MN, équivalent au cône ayant pour base le cercle de diamètre EZ et pour sommet le point A, et un point Φ divisant AH de manière que AH soit quadruple de ΦH ; le point Φ est, dès lors, le centre de gravité du cône EAZ, comme nous l'avons signalé plus haut[1]. Coupons, de plus, le cylindre MN par un plan perpendiculaire de manière que le cylindre M fasse équilibre au cône EAZ. Du moment donc que le cône EAZ et le segment ABΔ, restant en place, font équilibre au cône EAZ, déplacé et posé sur le levier au point Θ de manière que Θ soit son centre de gravité, que le cylindre MN est équivalent au cône EAZ, que chacun des deux cylindres M et N est posé au point Θ, et que le cylindre MN fait équilibre au segment et au cône, le cylindre N fera à son tour équilibre autour du point A au segment de sphère. D'autre part, le rapport du segment de sphère BAΔ au cône ayant pour base le cercle de diamètre BΔ et pour sommet le point A est égal au rapport de ΞH à HΓ, comme nous l'avons démontré plus haut[2]. Mais le rapport du cône BAΔ au cône EAZ est égal[3] au rapport du cercle de diamètre BΔ au cercle de diamètre EZ, et le rapport du cercle au cercle est égal au rapport du carré sur BH au carré sur HE ; de plus,

1. Cf. lemme 10.
2. Cf. prop. 7.
3. Cf. Eucl. XII, 11.

τὸ Α. Ὁμοίως δὲ καὶ πάντες οἱ κύκλοι οἱ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι καὶ ἐν τῷ ΑΕΖ κώνῳ αὐτοῦ μένοντες κατὰ τὸ Α σημεῖον ἰσόρροποι πᾶσι τοῖς κύκλοις τοῖς ἐν τῷ ΑΕΖ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτῶν τοῦ βάρους τὸ Θ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΔ τμῆμα τῆς σφαίρας καὶ ὁ ΑΕΖ κῶνος ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένοντα τῷ ΕΑΖ κώνῳ μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἔστω δὲ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, ἴσος κύλινδρος ὁ ΜΝ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΗ κατὰ τὸ Φ, ὥστε τετραπλασίαν εἶναι τὴν ΑΗ τῆς ΦΗ· τὸ Φ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ ΕΑΖ κώνου· τοῦτο γὰρ προγράφεται. Καὶ τετμήσθω ἔτι ὁ ΜΝ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέμνοντι πρὸς ὀρθάς, ⟨ὥστε τὸν Μ κύλιν⟩δρον ἰσορροπεῖν τῷ ΕΑΖ κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν ἰσόρροπος ὁ ΕΑΖ κῶνος καὶ τὸ ΑΒΔ τμῆμα αὐτοῦ μένοντα τῷ ΕΑΖ κώνῳ μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ, καί ἐστιν τῷ ΕΑΖ κώνῳ ἴσος ὁ ΜΝ κύλινδρος, καὶ κεῖται ἑκάτερος τῶν Μ, Ν κυλίνδρων κατὰ τὸ Θ, καὶ ἰσόρροπος ὁ ΜΝ κύλινδρος ἑκατέροις, ἰσόρροπος καὶ ὁ Ν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Α σημεῖον. Καὶ [ἐπεί] ἐστιν ὡς τὸ ΒΑΔ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, οὕτως ἡ ΞΗ πρὸς ΗΓ· τοῦτο γὰρ προγράφεται. Ὡς δὲ ὁ ΒΑΔ κῶνος πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ, ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ,

14 προγράφεται : προσγράφεται ‖ 20 τῷ : τὸ ‖ 21 τῶν Μ, Ν κυλίνδρων : τῷ ΜΝ κυλίνδρῳ ‖ 24 [ἐπεί] del. Heiberg ‖ 27 προγράφεται : προσγράφεται ‖ ΕΑΖ : ΕΖ.

le carré sur BH est équivalent au rectangle de côtés ΓΗ et ΗΑ, le carré sur ΗΕ est équivalent au carré sur ΗΑ, et le rapport du rectangle de côtés ΓΗ et ΗΑ au carré sur ΗΑ est égal au rapport de ΓΗ à ΗΑ ; il s'ensuit que le cône ΒΑΔ est au cône ΕΑΖ comme ΓΗ est à ΗΑ. Mais on a montré aussi que le cône ΒΑΔ est au segment ΒΑΔ comme ΓΗ est à ΗΞ ; par identité[1] donc, le segment ΒΑΔ est au cône ΕΑΖ comme ΞΗ est à ΗΑ. Et comme le rapport de ΑΧ à ΧΗ est égal au rapport de la somme de ΗΑ et du quadruple de ΗΓ à la somme de ΑΗ et du double de ΗΓ, par inversion[2], le rapport de ΗΧ à ΧΑ sera égal au rapport de la somme du double de ΓΗ et de ΗΑ à la somme du quadruple de ΓΗ et de ΗΑ. Par composition[3], le rapport de ΗΑ à ΑΧ sera égal au rapport de la somme du sextuple de ΓΗ et du double de ΗΑ à la somme de ΗΑ et du quadruple de ΗΓ. De plus, ΗΞ est égal au quart de la somme du sextuple de ΗΓ et du double de ΗΑ, et ΓΦ est égal au quart de la somme du quadruple de ΗΓ et de ΗΑ, comme cela est évident[4] ; ΗΑ est donc à ΑΧ comme[5] ΞΗ est à ΓΦ, d'où il suit que ΞΗ est à ΗΑ comme[6] ΓΦ est à ΧΑ. Mais on a montré aussi que le rapport de ΞΗ à ΗΑ est égal au rapport du segment, ayant pour sommet le point Α et pour base le cercle de diamètre ΒΔ, au cône ayant pour sommet le point Α et pour base le cercle de diamètre ΕΖ ; il s'ensuit que le segment ΒΑΔ est au cône ΕΑΖ comme ΓΦ est à ΧΑ. Et comme le cylindre Μ fait équilibre au cône ΕΑΖ autour du point Α, et que le centre de gravité du cylindre est le point Θ et celui du cône ΕΑΖ le point Φ, le cône ΕΑΖ sera au cylindre Μ comme ΘΑ est à ΑΦ, c'est-à-dire comme ΓΑ est à ΑΦ. De plus, le cône ΕΑΖ est équivalent au cylindre ΜΝ ; par décomposition[7] donc, le cylindre ΜΝ est au cylindre Ν comme ΑΓ est à ΓΦ. En outre, le cylindre ΜΝ est équivalent au cône ΕΑΖ ;

1. Cf. Eucl. V, 22.
2. Cf. Eucl. V, 7, coroll.
3-7. Cf. notes complémentaires.

καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ ΒΗ ἴσον τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΑ, τῷ δὲ ἀπὸ ΗΕ ἴσον τὸ ἀπὸ ΗΑ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΑ · ὡς ἄρα ὁ ΒΑΔ κῶνος πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΑ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑΔ κῶνος πρὸς τὸ ΒΑΔ τμῆμα, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΞ · δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΞΗ πρὸς ΗΑ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΧ πρὸς ΧΗ, οὕτως ἡ ΗΑ καὶ ἡ τετραπλασία τῆς ΗΓ πρὸς τὴν ΑΗ καὶ τὴν διπλασίαν τῆς ΗΓ, ἀνάπαλιν ἔσται ὡς ἡ ΗΧ πρὸς ΧΑ, οὕτως ἡ διπλασία τῆς ΓΗ καὶ ἡ ΗΑ πρὸς τὴν τετραπλῆν τῆς ΓΗ καὶ τὴν ΗΑ. Συνθέντι ὡς ἡ ΗΑ πρὸς ΑΧ, οὕτως ἡ ἑξαπλασία τῆς ΓΗ καὶ διπλασία τῆς ΗΑ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ τετραπλῆν τῆς ΗΓ. Καὶ τῆς μὲν ἑξαπλασίας τῆς ΗΓ καὶ διπλασίας τῆς ΗΑ ἡ ΗΞ, τῆς δὲ τετραπλασίας τῆς ΗΓ καὶ τῆς ΗΑ τέταρτον μέρος ἡ ΓΦ · τοῦτο γὰρ φανερόν · ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς ΑΧ, οὕτως ἡ ΞΗ πρὸς ΓΦ · ὥστε καὶ ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως ἡ ΓΦ πρὸς ΧΑ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως τὸ τμῆμα, οὗ ἐστι κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ ἐστι κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλος · ὡς ἄρα τὸ ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΓΦ πρὸς ΧΑ. Καὶ ἐπεὶ ἰσόρροπος ὁ Μ κύλινδρος τῷ ΕΑΖ κώνῳ κατὰ τὸ Α, καί ἐστι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον βάρους τὸ Θ, τοῦ δὲ ΕΑΖ κώνου τὸ Φ, ἔσται ἄρα ὡς ὁ ΕΑΖ κῶνος πρὸς τὸν Μ κύλινδρον, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΦ, τουτέστιν ἡ ΓΑ πρὸς ΑΦ. Καί ἐστι τῷ ΕΑΖ κώνῳ ἴσος ὁ ΜΝ κύλινδρος · διελόντι ἄρα ὡς ὁ ΜΝ κύλινδρος πρὸς τὸν Ν κύλινδρον, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΦ. Καί ἐστιν ἴσος ὁ ΜΝ κύλινδρος τῷ ΕΑΖ

5 τὸ : : om. || 11 ΗΑ : ἑξαπλῆ τῆς ΗΑ || 12 ἑξαπλασία : ἑξαπλασίαν || διπλασία : διπλασίαν || τῆς alt. τὴν || 13 τῆς pr. : τὴν || 27-28 διελόντι ἄρα ὡς ὁ ΜΝ κύλινδρος suppl. Heiberg.

le cône EAZ est donc au cylindre N comme ΓA est à ΓΦ, c'est-à-dire comme ΘA est à ΓΦ. Mais on a aussi démontré que le segment BAΔ est au cône EAZ comme ΓΦ est à XA ; par identité[1] donc, le segment ABΔ sera au cylindre N comme ΘA est à AX. Mais on a démontré que le segment BAΔ fait équilibre au cylindre N au point A, et, de plus, le centre de gravité du cylindre N est le point Θ ; par conséquent, le centre de gravité du segment BAΔ est le point X.

10.

Mêmes raisonnements pour démontrer la proposition suivante : Dans tout segment d'ellipsoïde, le centre de gravité est situé sur l'axe du segment, au point qui divise l'axe de manière que le rapport de la partie située du côté du sommet du segment à la partie restante soit égal au rapport de la somme de l'axe du segment et du quadruple de l'axe du segment opposé à la somme de l'axe du segment et du double de l'axe du segment opposé.

11.

La méthode s'applique aussi à la proposition que voici : Le rapport de tout segment d'hyperboloïde de révolution au cône ayant la même base et le même axe que le segment est égal au rapport de la somme de l'axe du segment et du triple de la droite ajoutée à l'axe[2] à la somme de l'axe du segment d'hyperboloïde et du double de la droite ajoutée à l'axe, et le centre de gravité du segment d'hyperboloïde est situé en un point qui divise l'axe de manière que le rapport de la

1. Cf. Eucl. V, 22.
2. Sur cette expression cf. *Sur les con. et les sphér.*, 25.

κώνῳ · ὡς ἄρα ὁ ΕΑΖ κῶνος πρὸς τὸν Ν κύλινδρον, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΓΦ, τουτέστιν ἡ ΘΑ πρὸς ΓΦ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΓΦ πρὸς ΧΑ · δι' ἴσου ἄρα ἔσται ὡς τὸ ΑΒΔ τμῆμα πρὸς τὸν Ν κύλινδρον, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΧ. Καὶ ἐδείχθη ἰσόρροπον τὸ ΒΑΔ τμῆμα τῷ Ν κυλίνδρῳ κατὰ τὸ Α, καί ἐστι τοῦ Ν κυλίνδρου κέντρον βάρους τὸ Θ · καὶ τοῦ ΒΑΔ ἄρα τμήματος κέντρον τὸ Χ σημεῖον. [τὸ σχῆμα].

ι'.

Ὁμοίως δὲ τούτοις θεωρεῖται καὶ ὅτι παντὸς τμήματος σφαιροειδέος τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥ ἐστιν ἄξων τοῦ τμήματος, διῃρημένης τῆς εὐθείας, ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος πρὸς τὸ λοιπὸν τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον ὅ τε ἄξων τοῦ τμήματος καὶ ἡ τετραπλασία τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι πρὸς συναμφότερον τόν τε ἄξονα τοῦ τμήματος καὶ τὴν διπλασίαν τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι ἐμπεριεχομένου.

ια'.

Θεωρεῖται δὲ διὰ τοῦ τρόπου ⟨καὶ ὅτι πᾶν τμῆμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος⟩ πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος ὅ τε ἄξων τοῦ τμήματος καὶ ἡ τριπλασία τῆς προσούσης τῷ ἄξονι πρὸς συναμφότερον τόν τε ἄξονα τοῦ τμήματος τοῦ κωνοειδέος καὶ τὴν διπλασίαν τῆς προσούσης τῷ ἄξονι, κέντρον δὲ τοῦ βάρους τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος

9 ι' : om. || 14 ἔχειν : ἔχει || 18 ἐμπεριεχομένου : ἐμπεριεχομένης || 19 ια' : om.

partie voisine du sommet à la partie restante soit égal au rapport entre la somme du triple de l'axe et de l'octuple de la droite ajoutée et la somme de l'axe de l'hyperboloïde et du quadruple de la droite ajoutée à l'axe. Bien que plusieurs autres théorèmes[1] puissent être démontrés par cette méthode, nous renonçons à les citer ici, parce que les théorèmes indiqués suffisent pour illustrer l'emploi de notre méthode.

12.

Si on inscrit dans un prisme droit, ayant pour bases des carrés, un cylindre ayant ses bases situées dans les carrés opposés et sa surface tangente aux quatre plans restants (sc. du prisme), et si on fait passer un plan par le centre de l'un des cercles de base du cylindre et par un des côtés du carré opposé, la figure découpée par le plan mené est la sixième partie du prisme entier. Cette proposition se démontre par cette méthode. Après l'avoir fait voir[2], nous retournerons à sa démonstration par la géométrie.

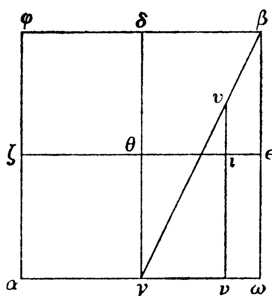


Fig. 129

1. Malgré une lacune de quelques mots dans le texte grec, le sens de cette conclusion de la prop. 11 est clair.
2. Cf. prop. 14 et 15.

τμηθέντος τοῦ ἄξονος, ⟨ὥστε⟩ τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ὅ τε τριπλάσιος τοῦ ἄξονος ⟨καὶ ἡ ὀκταπλασία⟩ τῆς προσκειμένης πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ τοῦ κωνοειδέος καὶ τὴν τετραπλασίαν αὐτῆς τῆς προσκειμένης πρὸς αὐτόν· καὶ ἄλλων πλειόνων ἁ .... θεωρουμένων τὰ ..... περιλήψομεν ῥη .... τως, ἐπεὶ ὁ τρόπος ὑποδέδεικται διὰ τῶν προειρημένων.

ιβ′.

Ἐὰν εἰς πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις κύλινδρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν βάσεις ἔχων ἐν τοῖς ἀπεναντίον τετραγώνοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν λοιπῶν [παραλληλογράμμων] τεσσάρων ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, διὰ δὲ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κυλίνδρου, καὶ μιᾶς πλευ⟨ρᾶς τοῦ ἀπεναντίον τετραγώνου ἐπίπε⟩δον ἀχθῇ, ὅτι τὸ ἀποτμηθὲν σχῆμα ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος ἐπιπέδου ⟨ἕκτον⟩ ἐστὶ μέρος τοῦ ὅλου πρίσματος, διὰ τοῦ τρόπου τούτου θεωρεῖται. Δείξαντες δὲ ἀναχωρήσομεν ἐπὶ τὴν διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀπόδειξιν αὐτοῦ.

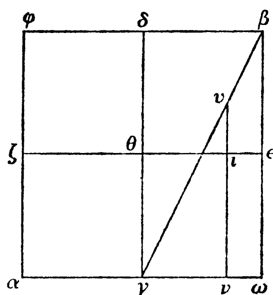


Fig. 129

2 τὸ : τὸν ‖ 5 προσκειμένης : προκειμένης ‖ 8 ιβ′ : om. ‖ 9 ἔχον : ἔχοντι ‖ 11-12 [παραλληλογράμμων] del. Heibger ‖ 12 ἐφαπτομένην : ἐφαπτόμενον ‖ 13 ὅς : ὅ ‖ 16 <ἕκτον> suppl. Heiberg.

Imaginons un prisme ayant pour bases des carrés, et un cylindre inscrit dans le prisme de la manière indiquée ; le prisme étant coupé par un plan passant par l'axe et perpendiculaire au plan découpant le segment du cylindre, soit le parallélogramme AB l'intersection de ce plan avec le prisme contenant le cylindre, la droite BΓ l'intersection du plan découpant le segment du cylindre avec le plan mené par l'axe et perpendiculaire au plan découpant le segment du cylindre ; soit ΓΔ l'axe du prisme et du cylindre et EZ une droite coupant l'axe à angle droit en son milieu ; faisons passer par EZ le plan perpendiculaire à ΓΔ, qui coupera le prisme suivant un carré et le cylindre suivant un cercle. Soit le carré MN l'intersection avec le prisme, et le cercle ΞΟΠΡ l'intersection avec le cylindre, et Ξ, Ο, Π, Ρ les points de contact de ce cercle avec les côtés du carré ; soit ΚΛ l'intersection du plan découpant le segment du cylindre avec le plan mené par EZ et perpendiculaire à l'axe du cylindre ; ΚΛ est divisé en deux parties égales par la droite ΠΘΞ. Menons dans le demi-cercle ΟΠΡ la droite ΣΤ perpendiculaire à ΠΧ, faisons passer par ΣΤ le plan perpendiculaire à ΞΠ, et prolongeons ce plan de part et d'autre du plan contenant le cercle ΞΟΠΡ ; l'intersection de ce plan avec le demi-cylindre ayant pour base le demi-cercle ΟΠΡ et pour hauteur l'axe du prisme sera le parallélogramme, dont un des côtés est égal à ΣΤ et dont l'autre côté est égal à la génératrice du cylindre, et son intersection avec le segment découpé du cylindre sera un autre parallélogramme,

Νοείσθω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις καὶ ἐν τῷ πρίσματι κύλινδρος ἐγγεγραμμένος ὡς εἴρηται, τμηθέντος δὲ τοῦ πρίσματος διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ τμῆμα τοῦ κυλίνδρου τοῦ μὲν πρίσματος τοῦ τὸν κύλινδρον ἔχοντος τομὴ ἔστω τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμῆμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἠγμένου ἐπιπέδου ὀρθοῦ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τμῆμα κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ ΒΓ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ πρίσματος καὶ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΓΔ εὐθεῖα, καὶ τεμνέτω αὐτὴν ἡ ΕΖ δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς, καὶ διὰ τῆς ΕΖ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΓΔ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ πρίσματι τομὴν τετράγωνον, ἐν δὲ τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλον. Ἔστω οὖν τοῦ μὲν πρίσματος τομὴ τὸ ΜΝ τετράγωνον, τοῦ δὲ κυλίνδρου ὁ ΞΟΠΡ ⟨κύκλος, καὶ ἐφαπτέσθω ὁ κύκλος⟩ τῶν τοῦ τετραγώνου πλευρῶν κατὰ τὰ Ξ, Ο, Π, Ρ σημεῖα, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμῆμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ διὰ τῆς ΕΖ ἀχθέντος ἐπιπέδου ὀρθοῦ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ ΚΛ εὐθεῖα· τέμνει δὲ αὐτὴν δίχα ἡ ΠΘΞ. Ἤχθω δέ τις εὐθεῖα ἐν τῷ ΟΠΡ ἡμικυκλίῳ ἡ ΣΤ πρὸς ὀρθὰς οὖσα τῇ ΠΧ, καὶ ἀπὸ τῆς ΣΤ ἐπίπεδον ἀνασταθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν ΞΠ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ ἐστιν ὁ ΞΟΠΡ κύκλος· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν τῷ ἡμικυλίνδρῳ, οὗ ἐστι βάσις τὸ ΟΠΡ ἡμικύκλιον, ὕψος δὲ ὁ ἄξων τοῦ πρίσματος, τομὴν παραλληλόγραμμον, οὗ ἔσται μία μὲν πλευρὰ ἡ ἴση τῇ ΣΤ, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ τοῦ κυλίνδρου πλευρᾷ, ποιήσει δὲ καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτετμημένῳ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τομὴν παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστιν

1 καὶ : om. ‖ 6 τὸ : om. ‖ 24 τοῦ ἐπιπέδου : τὸ ἐπίπεδον ‖ 25 ὁ : ἡ.

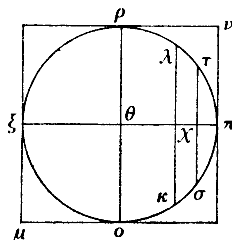


Fig. 130

dont l'un des côtés est égal à ΣΤ, l'autre à ΝΥ ; que ΝΥ soit mené dans le parallélogramme ΔΕ parallèlement à ΒΩ, de manière que ΝΥ découpe ΕΙ égal à ΠΧ. Puisque ΕΓ est un parallélogramme, que ΝΙ est parallèle à ΘΓ, et que ΕΘ et ΓΒ sont menés au travers de ces droites, ΕΘ est à ΘΙ comme ΩΓ est à ΓΝ, c'est-à-dire comme[1] ΒΩ est à ΥΝ. Mais le rapport de ΒΩ à ΥΝ est égal au rapport du parallélogramme déterminé dans le demi-cylindre au parallélogramme déterminé dans le segment découpé du cylindre[2], puisque les deux parallélogrammes ont en commun le côté ΣΤ ; de plus, ΕΘ est égal à ΘΠ, et ΙΘ est égal à ΧΘ ; comme ΠΘ est égal à ΘΞ, le rapport de ΘΞ à ΘΧ est égal au rapport du parallélogramme déterminé dans le demi-cylindre au parallélogramme déterminé dans le segment découpé du cylindre.

Imaginons que le parallélogramme dans le segment soit déplacé et posé sur le point Ξ de manière que Ξ soit son centre de gravité, et imaginons que ΠΞ soit un levier de centre Θ ; dès lors, le parallélogramme dans le demi-cylindre, restant en place, fait équilibre autour du point Θ au parallélogramme déterminé dans

1. Cf. Eucl. VI, 4.
2. Cf. Eucl. VI, 1.

Fig. 130

ἡ μὲν ἑτέρα πλευρὰ ἴση τῇ ΣΤ, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ ΝΥ · ἔστω δὲ οὕτως ἡ ΝΥ ἠγμένη ἐν τῷ ΔΕ παραλληλογράμμῳ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΩ ἴσην ἀπολαμβάνουσα τὴν ΕΙ τῇ ΠΧ. Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΓ, καὶ παράλληλος ἡ ΝΙ τῇ ΘΓ, καὶ διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΕΘ, ΓΒ, ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΙ, οὕτως ἡ ΩΓ πρὸς ΓΝ, τουτέστιν ἡ ΒΩ πρὸς ΥΝ. Ὡς δὲ ἡ ΒΩ πρὸς ΥΝ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον τὸ γενόμενον ⟨ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ πρὸς τὸ γε⟩νόμενον ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου · ἀμφοτέρων γὰρ τῶν παραλληλογράμμων ἡ αὐτὴ πλευρά ἐστιν ἡ ΣΤ · καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΠ, ἡ δὲ ΙΘ τῇ ΧΘ · καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΠΘ τῇ ΘΞ, ὡς ἄρα ἡ ΘΞ πρὸς ΘΧ, οὕτως τὸ γενόμενον παραλληλόγραμμον ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ πρὸς τὸ γενόμενον ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου.

Νοείσθω μετακείμενον τὸ ἐν τῷ τμήματι παραλληλόγραμμον καὶ κείμενον κατὰ τὸ Ξ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ, καὶ ἔτι νοείσθω ζυγὸς ἡ ΠΞ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Θ · ἰσορροπεῖ δὴ περὶ τὸ Θ σημεῖον τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ αὐτοῦ μένον τῷ παραλληλογράμμῳ τῷ γενομένῳ ἐν τῷ ἀπο-

1 ΣΤ, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ suppl. Heiberg || 5 ΓΒ : ΘΒ || 6 οὕτως : οὕτως ὡς || 7-8 παραλληλόγραμμον : παράλληλον || 14 τῷ alt. : om. || 16 τὸ : τῷ || 18 ἔτι : ἐστι || 21 τῷ tert. om.

le segment découpé du cylindre, déplacé et posé sur le levier au point Ξ de manière que Ξ soit son centre de gravité. Comme le centre de gravité du parallélogramme, déterminé dans le demi-cylindre[1], est le point X, et celui du parallélogramme, déterminé dans le segment découpé, et déplacé, le point Ξ, et que le rapport de ΞΘ à ΘX est égal au rapport du parallélogramme, que nous avons dit avoir pour centre de gravité le point X au parallélogramme, que nous avons dit avoir pour centre de gravité le point Ξ, le parallélogramme de centre de gravité X fera équilibre autour du point Θ au parallélogramme de centre de gravité Ξ. On démontrera de la même manière que, si dans le demi-cercle ΟΠΡ on mène une autre droite perpendiculaire à ΠΘ, si on fait passer par la droite menée le plan perpendiculaire à ΠΘ et qu'on prolonge ce plan de part et d'autre du plan contenant le cercle ΞΟΠΡ, le parallélogramme déterminé dans le demi-cylindre, restant en place, fera équilibre au parallélogramme déterminé dans le segment découpé du cylindre, déplacé et posé sur le levier au point Ξ de manière que Ξ soit son centre de gravité. Il s'ensuit que tous les parallélogrammes déterminés dans le demi-cylindre, restant en place, feront équilibre autour du point Θ à tous les parallélogrammes déterminés dans le segment découpé du cylindre, déplacés et posés sur le levier au point Ξ ; par conséquent, le demi-cylindre lui-même, restant en place, fera équilibre autour du point Θ au segment

1. Cf. lemme 6.

τμήματι τῷ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Ξ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ σημεῖον. Καὶ ἐπεί ἐστι τοῦ μὲν παραλληλογράμμου τοῦ γενομένου ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ, τοῦ δὲ παραλληλογράμμου τοῦ γενομένου ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι μετενηνεγμένου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ξ, καὶ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΞΘ πρὸς ΘΧ, ὃν τὸ παραλληλόγραμμον, οὗ εἴπομεν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Χ, πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον, οὗ εἴπομεν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Ξ, ἰσορροπήσει ἄρα περὶ τὸ Θ τὸ παραλληλόγραμμον, οὗ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ, τῷ παραλληλογράμμῳ, οὗ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ξ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ὅταν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῷ ΟΠΡ ἡμικυκλίῳ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΠΘ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΠΘ καὶ ἐκβληθῇ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἐν ᾧ ἐστιν ὁ ΞΟΠΡ κύκλος, [ὅτι] τὸ γινόμενον παραλληλόγραμμον ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ ἰσόρροπον περὶ τὸ Θ σημεῖον αὐτοῦ μένον τῷ παραλληλογράμμῳ τῷ γενομένῳ ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μενενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Ξ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ σημεῖον. Καὶ πάντα ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ γενόμενα ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ αὐτοῦ μένοντα ἰσορροπήσει περὶ τὸ Θ σημεῖον πᾶσι τοῖς παραλληλογράμμοις τοῖς γενομένοις ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μετενηνεγμένοις καὶ κειμένοις τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον· ὥστε ἰσορροπεῖν καὶ τὸ ἡμικυλίνδριον αὐτοῦ μένον περὶ τὸ Θ σημεῖον τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι

2 ὥστε : ἔσται || 2-3 αὐτοῦ τοῦ : τοῦ αὐτοῦ || 8 εἴπομεν : εἴπωμεν || 10 ἰσορροπήσει — 13 τὸ Ξ suppl. Heiberg || 17 [ὅτι] del. Heiberg || 27 καὶ : om. || 28 ὥστε : om.

découpé, déplacé et posé sur le levier au point Ξ de manière que Ξ soit son centre de gravité.

13.

Soit de nouveau le parallélogramme MN perpendiculaire à l'axe, et le cercle ΞΟΠΡ ; menons les droites ΘΜ et ΘΗ, faisons passer par elles les plans perpendiculaires au plan contenant le demi-cercle ΟΠΡ, et prolongeons les plans indiqués dans les deux sens ;

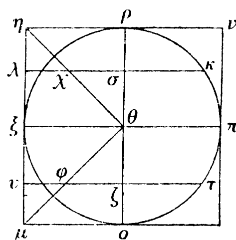


Fig. 131

il y aura dès lors un prisme ayant une base telle que le triangle ΘΜΗ et une hauteur égale à l'axe du cylindre, et ce prisme est la quatrième partie du prisme entier qui contient le cylindre[1]. Menons dans le demi-cercle ΟΠΡ et dans le carré MN des droites ΚΛ et ΤΥ, équidistantes de ΠΞ, qui coupent la circonférence du demi-cercle ΟΠΡ aux points K et T, le diamètre ΟΡ aux points Σ et Z, et les droites ΘΗ et ΘΜ aux points Φ et Χ ; faisons passer par ΚΛ et ΤΥ les plans perpendiculaires à ΟΡ et prolongeons ces plans de part et d'autre du plan contenant le cercle ΞΟΠΡ ; dès lors,

1. Cf. Eucl. XI, 32.

μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Ξ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ σημεῖον.

ιγ'.

Ἔστω δὴ πάλιν τὸ ⟨ὀρθὸν πρὸς⟩ τὸν ἄξονα παραλληλόγραμμον τὸ ΜΝ καὶ ὁ κύκλος ⟨ὁ⟩ ΞΟ⟨ΠΡ⟩, καὶ ἐπεζ⟨εύχθω⟩σαν αἱ ΘΜ, ΘΗ, καὶ ἀνεστάτω ἀπ' αὐτῶν ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστι τὸ ΟΠΡ ἡμικύκλιον, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ εἰρημένα ἐπίπεδα·

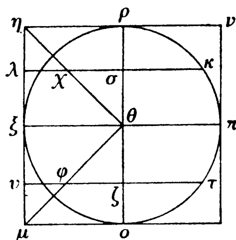


Fig. 131

ἔσται δή τι πρίσμα βάσιν μὲν ἔχον τηλικαύτην, ἡλίκη ἐστὶ τὸ ΘΜΗ τρίγωνον, ὕψος δὲ ἴσον τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου, καί ἐστι τὸ πρίσμα τοῦτο τέταρτον μέρος τοῦ ὅλου πρίσματος τοῦ περιέχοντος τὸν κύλινδρον. Ἤχθωσαν δέ τινες εὐθεῖαι ἐν τῷ ΟΠΡ ἡμικυκλίῳ καὶ ἐν τῷ ΜΝ τετραγώνῳ αἱ ΚΛ, ΤΥ ἴσον ἀπέχουσαι τῆς ΠΞ· τέμνουσιν δὴ αὗται τὴν μὲν τοῦ ΟΠΡ ἡμικυκλίου περιφέρειαν κατὰ τὰ Κ, Τ σημεῖα, τὴν δὲ ΟΡ διάμετρον κατὰ τὰ Σ, Ζ, τὰς δὲ ΘΗ, ΘΜ κατὰ τὰ Φ, Χ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῶν ΚΛ, ΤΥ ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὴν ΟΡ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ ἐστιν ὁ ⟨ΞΟΠΡ κύκλος· ποιήσει δὴ

1 μετενεχθέντι suppl. Heiberg ‖ 3 ιγ' : om. ‖ 14 ΠΞ : ΣΠΞ.

l'un de ces plans déterminera, dans le demi-cylindre ayant pour base le demi-cercle ΟΠΡ et pour hauteur celle du cylindre, comme intersection un parallélogramme dont l'un des côtés est égal à ΚΣ et l'autre égal à l'axe du cylindre, et, de la même manière, dans le prisme ΘΗΜ, un parallélogramme ayant l'un de ses côtés égal à ΛΧ et l'autre égal à l'axe ; pour les mêmes raisons, le même demi-cylindre sera coupé suivant un (sc. autre) parallélogramme ayant l'un de ses côtés égal à ΤΖ et l'autre égal à l'axe du cylindre, et le prisme sera coupé suivant un parallélogramme ayant l'un de ses côtés égal à ΥΦ et l'autre égal à l'axe du cylindre[1].

14.

Soit un prisme droit ayant pour bases des carrés ; qu'une de ses bases soit le carré ΑΒΓΔ ; inscrivons dans le prisme un cylindre ayant pour base le cercle ΕΖΗΘ, tangent aux côtés du carré ΑΒΓΔ aux points

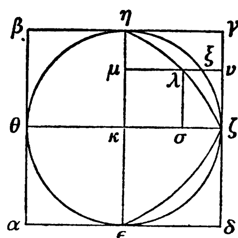


Fig. 132

Ε, Ζ, Η, Θ, et faisons passer un plan par le centre de ce cercle et par le côté correspondant à ΓΔ dans le

1. Cf. notes complémentaires.

τὸ ἕτερον ἐν⟩ μὲν τῷ ἡμικυλινδρίῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν τὸ ΟΠΡ ἡμικύκλιον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τομὴν παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστιν μία μὲν πλευρὰ ἴση τῇ ΚΣ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου, ἐν δὲ τῷ πρίσματι τῷ ΘΗΜ ὁμοίως παραλληλόγραμμον, οὗ ἔσται μία μὲν ἴση τῇ ΛΧ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι· διὰ δὲ τὰ αὐτὰ ἐν τῷ αὐτῷ ἡμικυλινδρίῳ ἔσται τι παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστι μία μὲν πλευρὰ ἴση τῇ ΤΖ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι ⟨τοῦ κυλίνδρου, ἐν δὲ τῷ πρίσματι παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστιν ἡ μὲν μία⟩ πλευρὰ ἴση τῇ ΥΦ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου . . . . . .

ιδ'.

Ἔστω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις, καὶ ἔστω αὐτοῦ μία τῶν βάσεων τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ πρίσμα κύλινδρος, καὶ ἔστω τοῦ κυλίνδρου βάσις ὁ ΕΖΗΘ κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν τοῦ

Fig. 132

ΑΒΓΔ πλευρῶν κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, διὰ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ τῆς τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς τῆς ἐν τῷ κατε-

6 δὲ alt. : om. ‖ 7 ἐν : τῷ ἐν ‖ 12 ιδ' : om. ‖ 16-18 τῶν τοῦ ΑΒΓΔ πλευρῶν κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, διὰ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ suppl. Heiberg ‖ 18 ἐν τῷ : ε̄ (hoc est Ε).

carré situé dans le plan opposé à celui du plan de ΑΒΓΔ ; ce plan découpera du prisme entier un autre prisme, qui sera la quatrième partie du prisme entier, et qui sera limité par trois parallélogrammes et par deux triangles situés l'un en face de l'autre. Décrivons dès lors dans le demi-cercle ΕΖΗ une parabole ; soit ΖΚ la partie de son diamètre située dans le segment de parabole ; menons dans le parallélogramme ΔΗ la droite ΜΝ parallèle à ΚΖ ; elle coupera la circonférence du demi-cercle en Ξ et la parabole en Λ. Il est manifeste[1] que le rectangle de côtés ΜΝ et ΝΛ est équivalent au carré sur ΝΖ ; dans ces conditions[2], ΜΝ sera à ΝΛ comme[3] le carré sur ΚΗ est au carré sur ΛΣ. Faisons passer par ΜΝ le plan perpendiculaire à ΕΗ ; ce plan coupera le prisme découpé du prisme entier suivant un triangle rectangle, dont l'un des côtés de l'angle droit sera ΜΝ, dont l'autre côté, perpendiculaire, dans le plan passant par ΓΔ, à la droite ΓΔ au point Ν, est égal à l'axe du cylindre, et dont l'hypoténuse est située dans le plan sécant même ; mais ce plan coupera aussi le segment découpé du cylindre par le plan mené par ΕΗ et par le côté du carré, opposé à ΓΔ, suivant un triangle rectangle, dont l'un des côtés de l'angle droit est ΜΞ, dont l'autre côté est situé dans la surface du cylindre et perpendiculaire au plan ΚΝ en Ξ, et dont l'hypoténuse est située dans le plan sécant. Pour les mêmes raisons donc, puisqu'il est évident[4] que le rectangle de côtés ΜΝ et ΜΛ est équivalent au carré sur ΜΞ, ΜΝ sera à ΜΛ comme le carré sur ΜΝ est au carré sur ΜΞ. Mais le rapport du carré sur ΜΝ au carré

1. Cf. Apollonius I, 11.
2. Cf. Eucl. V, déf. 9 ; VI, 17.
3. Cf. *Quadr. parab.*, 3.
4. Puisque $\overline{\mathrm{M\Xi}}^2 = \mathrm{MH} \cdot \mathrm{ME} = \overline{\mathrm{HK}}^2 - \overline{\mathrm{MK}}^2 = \overline{\mathrm{MN}}^2 - \mathrm{MN} \cdot \mathrm{N\Lambda} = \mathrm{MN}\,(\mathrm{MN} - \mathrm{N\Lambda})$; cf. Eucl. II, 5 ; III, 31 ; VI, 8, coroll. ; VI, 17.

ναντίον ἐπιπέδῳ τοῦ ΑΒΓΔ τῆς κατὰ τὴν ΓΔ ἐπίπεδον ἤχθω· ἀποτεμεῖ δὴ τοῦτο ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος ἄλλο πρίσμα, ὃ ἔσται τέταρτον μέρος τοῦ ὅλου πρίσματος, αὐτὸ δὲ τοῦτο ἔσται περιεχόμενον ὑπὸ τριῶν παραλληλογράμμων καὶ δύο τριγώνων κατεναντίον ἀλλήλοις. Γεγράφθω δὴ ἐν τῷ ΕΖΗ ἡμικυκλίῳ ὀρθογωνίου κώνου τομή, ἔστω ⟨δὲ⟩ . . . . ἐν τῇ τομῇ . . τῆς ἡ ΖΚ, καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ ἡ ΜΝ παράλληλος οὖσα τῇ ΚΖ· τεμεῖ δὴ αὕτη τὴν μὲν τοῦ ἡμικυκλίου περιφέρειαν κατὰ τὸ Ξ, τὴν δὲ τοῦ κώνου τομὴν κατὰ τὸ Λ. Καί ἐστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΜΝΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΖ· τοῦτο γάρ ἐστι σαφές· διὰ τοῦτο δὴ ἔσται ὡς ἡ ΜΝ πρὸς ΝΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΣ. Καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΕΗ· ποιήσει δὴ τὸ ἐπίπεδον ἐν τῷ πρίσματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος τομὴν τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ ἔσται μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἡ ΜΝ, ἡ δὲ ἑτέρα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ ὀρθὴ πρὸς τὴν ΓΔ ἀναγομένη ἀπὸ τοῦ Ν ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ἐν αὐτῷ τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ· ποιήσει δὲ καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀχθέντος διὰ τῆς ΕΗ καὶ τῆς τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς τῆς κατεναντίον τῇ ΓΔ τομὴν τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ ἔσται μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἡ ΜΞ, ἡ δὲ ἑτερα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου ⟨ἀν⟩ηγμένη ⟨ἀπὸ τοῦ Ξ⟩ ὀρθὴ πρὸς τὸ ΚΝ ἐπίπεδον, ⟨ἡ δὲ⟩ ὑποτείνουσα ἐν ⟨τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ⟩. Ὁμοίως οὖν, ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΜΝ, ΜΛ τῷ ἀπὸ ΜΞ· ⟨τοῦτο γὰρ φανε⟩ρόν ⟨ἐστιν⟩· ἔσται ὡς ἡ ⟨ΜΝ⟩ πρὸς τὴν ⟨ΜΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΝ⟩ πρὸς τὸ ⟨ἀπὸ ΜΞ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ⟩ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ⟨ΜΞ,

2-3 ἄλλο πρίσμα, ὃ suppl. Heiberg.

sur MΞ est égal au rapport du triangle sur MN déterminé dans le prisme au triangle sur MΞ découpé dans le segment par la surface du cylindre[1], le triangle est donc au triangle comme MN est à MΛ. Mais nous montrerons de la même manière que, si dans le parallélogramme circonscrit à la parabole on mène une autre parallèle à KZ et qu'on élève sur la droite menée le plan perpendiculaire à EH, le triangle déterminé dans le prisme sera au triangle déterminé dans le segment de cylindre comme la parallèle à KZ menée dans le parallélogramme ΔH est au segment de droite intercepté entre la parabole EHZ et le diamètre EH. Dès lors, le parallélogramme ΔH étant rempli par les parallèles à KZ et le segment compris entre la parabole et le diamètre étant rempli par les segments de droite interceptés dans le segment............[2] aux parallèles à KZ menées dans le parallélogramme ΔH, et le rapport de tous les triangles contenus dans le prisme à tous les triangles contenus dans le segment découpé du cylindre sera égal au rapport de toutes les droites dans le parallélogramme ΔH à toutes les droites interceptées entre la parabole et la droite EH. Or les

1. Cf. Eucl. VI, 19.

2. La lacune dans le texte grec n'a pu être comblée ; mais l'absence de cette partie du raisonnement ne dérange pas la fin de la démonstration.

οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς⟩ ΜΝ τρίγω⟨νον τὸ ἐν τῷ πρίσμα⟩τι γε⟨νόμενον πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΞ τρίγω⟩νον τὸ ἐν τῷ ⟨τμήματι ἀφῃρημένον⟩ ὑπὸ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· ὡς ἄρα ἡ ΜΝ πρὸς ΜΛ, ⟨οὕτως τὸ τρίγωνον⟩ πρὸς τὸ τρίγωνον. Ὁμοίως δὲ ⟨δ⟩εί⟨ξομεν καί⟩, ἐὰν ⟨ἄλλ⟩η τ⟨ις ἀχθῇ ἐν τῷ περὶ τὴν τομὴν πε⟩ριγραφ⟨έντι⟩ παραλληλογράμμῳ ⟨παρὰ⟩ τὴν ΚΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπί⟨πεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν⟩ πρὸς τὴν ΕΗ, ὅτι ἔσται ὡς τὸ τρίγωνον τὸ γενόμενον ἐν τῷ πρίσματι πρὸς τὸ .... τμήματι ..... ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, οὕτως ἡ ἀχθεῖσα ⟨ἐν⟩ τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ παράλληλος τῇ ΚΖ ⟨πρὸς τὴν⟩ ἀποληφθεῖσαν ὑπὸ τῆς ΕΗΖ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ διαμέτρου. Συμπληρωθέντος οὖν τοῦ ΔΗ παραλληλογράμμου ὑπὸ τῶν ἠγμένων παρὰ τὴν ΚΖ καὶ τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς διαμέτρου ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ἐν τῷ τμήματι συμπληρω .... τοῦ τμήματος τοῦ ..... ἐν τῷ ἀπὸ τοῦ ..... γινομ ..... πων ..... τὰ γ .... α καὶ ..... τῷ ΔΗ .... δὲ ετι .... μα .... η ετι .... ἀπ .... ἀγομένων παρὰ τὴν ΚΖ ....τομῆς καὶ .... ει ταῖς ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ ἠγμέναις παρὰ τὴν ΚΖ, καὶ ἔσται ὡς πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἐν τῷ πρίσματι πρὸς πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἐν τῷ ἀποτμηθέντι τμήματι τοῦ κυλίνδρου ἀφῃρημένα, οὕτως πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς μεταξὺ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ

3 τῆς : om. || 4-5 πρὸς τὸ τρίγωνον : πρὸς τὴν seq. lacuna || 6-7 παραλληλογράμμῳ suppl. Heiberg || 8 τὴν : om. || 10 τμήματι : τμήμα$^{\tau}$ || 26 ὡς : om.

triangles dans le prisme composent le prisme, les triangles dans le segment découpé du cylindre composent ce segment, les parallèles à KZ dans le parallélogramme ΔH composent le parallélogramme ΔH, et les droites interceptées entre la parabole et la droite EH composent le segment de parabole[1] ; il s'ensuit que le prisme est au segment découpé du cylindre comme le parallélogramme ΔH est au segment EZ compris entre la parabole et la droite EH. Mais le parallélogramme ΔH est équivalent aux trois demis du segment compris entre la parabole et la droite EH comme nous l'avons démontré dans nos écrits publiés antérieurement[2] ; par conséquent, le prisme est à son tour équivalent aux trois demis du segment découpé du cylindre ; le segment découpé du cylindre est donc à deux comme le prisme est à trois. Mais le prisme est à trois comme le prisme entier, contenant le cylindre, est à douze, puisque l'un est équivalent au quart de l'autre, d'où il suit que le segment du cylindre est à deux comme le prisme entier est à douze ; par conséquent, le segment découpé du cylindre est la sixième partie du prisme.

15.

Soit un prisme droit ayant pour bases des carrés ; que le carré ΑΒΓΔ soit une de ces bases ; inscrivons dans le prisme un cylindre, dont la base soit le cercle EZH ; ce cercle est tangent aux côtés du carré aux points E, Z, H et Θ ; soit K son centre ; menons un

1. L'expression τῆς παραβολῆς constitue un anachronisme, dans ce texte, analogue à celui que nous avons relevé dans la prop. 3, à propos de ἡ πλαγία et ἡ ὀρθία. Heiberg condamne ces termes comme interpolation.

2. Cf. *Quadr. parab.*, 24 ; *Méth.*, 1.

εὐθείας. Καὶ ἐκ μὲν τῶν ἐν τῷ πρίσματι τριγώνων σύγκειται τὸ πρίσμα, ἐκ δὲ τῶν ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ ⟨ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τὸ ἀπότμημα, ἐκ δὲ τῶν ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ παραλλήλων τῇ ΚΖ τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, ἐκ δὲ τῶν . . . . . μεταξὺ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ ⟨τὸ τμῆμα⟩ [τῆς παραβολῆς]· ὡς ἄρα τὸ πρίσμα πρὸς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, οὕτω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖΗ τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας. Ἡμιόλιον δὲ τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς πρότερον ἐκδεδομένοις· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ πρίσμα τοῦ ἀποτμήματος τοῦ ἀφῃρημένου ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου· οἵων ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κυλίνδρου δύο, τοιούτων ἐστὶ τὸ πρίσμα τριῶν. Οἵων δὲ τὸ πρίσμα τριῶν, τοιούτων ἐστὶν τὸ ὅλον πρίσμα τὸ περιέχον τὸν κύλινδρον $\overline{\iota\beta}$ διὰ τὸ δ' εἶναι τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου· οἵων ἄρα τὸ ἀπότμημα τοῦ κυλίνδρου δύο, τοιούτων ἐστὶν τὸ ὅλον πρίσμα $\overline{\iota\beta}$· ὥστε τὸ τμῆμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος.

ιε'.

Ἔστω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις, ὧν μία ἔστω τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ πρίσμα κύλινδρος, οὗ βάσις ἔστω ὁ ΕΖΗ κύκλος· ⟨ἐφάπτεται⟩ δὴ οὗτος τῶν τοῦ τετραγώνου πλευρῶν κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα· κέντρον δὲ ⟨ἔστω τὸ Κ, καὶ

6 [τῆς παραβολῆς] del. Heiberg ‖ 16-17 Οἵων δὲ τὸ πρίσμα τριῶν suppl. Heiberg ‖ 23 ιε' : om.

plan par son diamètre EH et par le côté du[1] carré opposé qui correspond à ΓΔ ; ce plan découpe ainsi du prisme entier un prisme et du cylindre un segment de cylindre. Je dis que nous démontrerons que ce segment découpé du cylindre par le plan ainsi mené est la sixième partie du prisme entier.

Nous commencerons par démontrer qu'il sera possible d'inscrire dans le segment découpé du cylindre une figure solide et de lui en circonscrire une autre, les deux figures étant composées de prismes ayant la même hauteur et ayant pour bases des triangles semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à toute grandeur donnée. Divisons[2], en effet, dans le demi-cercle EZH, le diamètre EH d'une façon continue en deux parties égales, menons par les points de division des parallèles à KZ coupant la circonférence du demi-cercle, menons par les points d'intersection de ces droites avec la circonférence des parallèles à EH et prolongeons-les de part et d'autre jusqu'à leur intersection avec les deux parallèles à KZ voisines ; faisons passer par les parallèles de chaque série des plans perpendiculaires au plan du demi-cercle ; ces plans formeront, dès lors, à l'intérieur et à l'extérieur du segment de cylindre des prismes de même hauteur et ayant pour bases des triangles rectangles apposés aux droites parallèles à KZ. Si maintenant la division de EH en deux parties égales est répétée jusqu'à ce que les deux prismes adjacents à KZ soient inférieurs à une grandeur donnée[3], l'excès de la figure solide circonscrite au segment de cylindre, composée de prismes, sur la figure inscrite de la même manière sera moindre qu'un volume qui est lui-même inférieur à la grandeur donnée ; l'excès est en effet égal à la somme des deux prismes adjacents à KZ, puisque à tous les autres prismes de la figure circonscrite correspondent autant de prismes égaux de la figure inscrite.

1-3. Cf. notes complémentaires.

διὰ τῆς⟩ ΕΗ διαμέτρου ⟨καὶ μιᾶς πλευρᾶς⟩ . . . . ⟨ἐπίπεδον ἤχθω⟩˙ τοῦτο δὴ τὸ ἐπίπεδον ἀποτέμνει πρίσμα ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος καὶ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἀπότμημα κυλίνδρου. ⟨Λέγω δὴ ὅτι τοῦ⟩το ⟨τὸ⟩ τμῆμα τὸ ἀποτετμημένον ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος ἐπιπέδου ἕκτον μέρος ὂν δειχθήσεται τοῦ ὅλου πρίσματος.

Πρῶτον δὲ δείξομεν ὅτι δυνατὸν ἔσται εἰς τὸ τμῆμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα στερεὸν ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι ἐκ πρισμάτων συγκείμενον ἴσον ὕψος ἐχόντων καὶ βάσεις τριγώνους ἐχόντων ὁμοίας, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος μεγέθους . . . . . γὰρ τοῦ πρίσματος τοῦ κατὰ τὸ ΒΔ παραλληλογράμμου . . . . καὶ . . . ω . . . . γραμμένου. ω . . το . . Ξ. ἐπιπέδῳ . . ⟨σ⟩ημεῖα τοῦ . . . . . ατος . . . η . . . ρετό . πω . . . . νομεν . . . . . εστ . . σων . . . . . .ἔστω . . . . το . . λειπόμενον . . νι . μια ἐλασ . . . . ν . . τοῦ λείμματος. στ . . . . ε . . ει . . . καὶ . . . ει . . . α τω . ει . . . . το . . ατα . . . . τω ἐκ . . . . τμῆμα τὸν το . . . . . . ἀπο⟨τ⟩μ⟨η⟩θ . . . . ἀπὸ . . . . δι . . . . ε . . . μάτων . . . . μεν . . . . ων . . . . ται καὶ τῶν . . . . . ἐγγεγραμμένω . . . δι . . . . των κει . . . . . τα . . . ΚΩ παραλληλόγραμμον . . . . αμμον . . . . σχήματι πρίσμα . . . . . . ησ . . . . τὸ ἀπὸ . . . . δρου . ἐγγεγράφθω . . . . . . μια . . . . σχῆμα, τὸ εἰρ⟨ημένον⟩ σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου . . . . ἔχει . . . τοῦ δοθέντος . . . . . . ἐχέτω . . . . . . οσ . . . . . τῶν πρισμάτων . . . . ἴσον αὐ . . . ⟨ση-⟩μεῖα . . . . ἐγγεγρά⟨φθω⟩ . . . . ν ἐσ . . . . . .

2 τὸ : om.

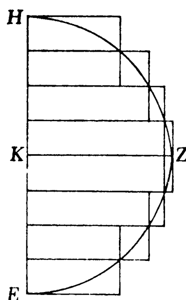


Fig. 133

De plus, si on décrit dans le demi-cercle une parabole EZH, qu'on mène par ses points d'intersection avec les parallèles à ZK des droites parallèles à EH et qu'on prolonge ces droites comme nous l'avons indiqué plus haut, on aura construit une figure circonscrite au segment de parabole, et une autre figure inscrite (sc. dans ce segment), les deux figures étant composées de parallélogrammes et telles que l'excès de la première sur la seconde soit égal à la somme des deux parallélogrammes adjacents à ZK ; de plus, les parallélogrammes correspondront chacun à un des prismes dans les figures solides que nous avons indiquées.

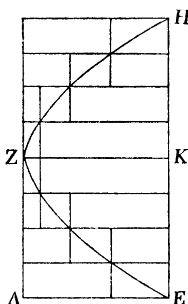


Fig. 134

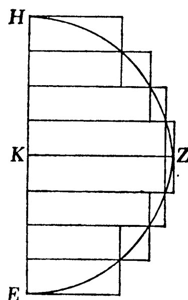


Fig. 133

δευτέρῳ . . . . γεγρ . . . . γει . . . . . η . . . . . . ⟨τέ⟩τμηται κατὰ τὸ αὐτὸ . . . . ⟨ἐγγεγρ⟩αμμένον ἐν . . . . . . κύκλ . . . το⟨ῦ⟩ τμήματος τη συνθε . τ . . . . ἀπο . . . . μείζων ἐστὶν τοῦ ἐγγεγραμμένου . . . . . . ⟨τμ⟩ήματος ἐν τῷ πρίσματι τῷ κατὰ τὸ . . . . ω

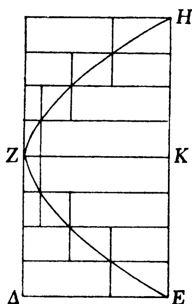


Fig. 134

Dès lors, si le segment découpé du cylindre n'est pas équivalent à la sixième partie du prisme entier, il est ou bien supérieur ou bien inférieur à cette sixième partie. Qu'il soit d'abord, si possible, supérieur ; le prisme découpé par le plan oblique est donc inférieur aux trois demis du segment de cylindre. Inscrivons donc et circonscrivons à ce segment de cylindre des figures solides telles que nous l'avons indiqué, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à une grandeur donnée. Du moment donc que, comme nous l'avons démontré[1], le rapport des droites menées dans le parallélogramme ΔH aux droites interceptées entre la parabole et la droite EH est égal au rapport des triangles du prisme découpé par le plan oblique aux triangles du segment découpé du cylindre, c'est-à-dire égal au rapport des prismes contenus dans le prisme découpé par le plan oblique aux prismes contenus dans la figure solide inscrite[2], diminués de deux, et que le rapport entre les droites indiquées est égal au rapport des parallélogrammes, en lesquels est divisé le parallélogramme ΔH, aux parallélogrammes contenus dans la figure inscrite dans la parabole[3], moins deux, le prisme découpé par le plan oblique sera à la figure inscrite comme[4] le parallélogramme ΔH est à la figure inscrite dans la parabole. Et comme le prisme découpé par le plan oblique est inférieur aux trois demis du segment de cylindre, et que l'excès de ce dernier sur la figure inscrite est inférieur à une grandeur donnée[5], le prisme découpé par le plan oblique sera inférieur aux trois demis de la figure solide inscrite dans le segment découpé du cylindre. Mais on a démontré que le rapport du prisme découpé par le plan oblique à la figure solide inscrite dans le segment découpé du cylindre est égal au rapport du parallélogramme ΔH

1. Cf. prop. 14.
2. Cf. Eucl. XI, 32.
3. Cf. Eucl. VI, 1.
4. Cf. lemme 11.
5. Fin de la lacune.

⟨. . . . . . ἔλασσον ἄρα ἢ ἡμιό⟩λιον τὸ πρίσμα τὸ ἀποτετμημένον ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου στερεοῦ. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου ἀφῃρημένον πρίσμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον στερεὸν εἰς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, οὕτως τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὰ ἐγγεγραμμένα παραλληλόγραμμα εἰς τὸ τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας· ἔλασσον ἄρα ἢ ἡμιόλιον τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον τῶν παραλληλογράμμων τῶν ἐν τῷ τμήματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας· ὅπερ ἀδύνατον, ἐπεὶ τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας ἡμιόλιον δέδεικται τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον ἐν ἑτέροις. Οὐκ ἄρα μεῖ⟨ζον⟩

1 τὸ πρίσμα τὸ : τοῦ πρίσματος ‖ 1-2 ἀποτετμημένον ὑπὸ suppl. Heiberg ‖ 3 τὸ alt. : τοῦ ‖ 4 ἀφῃρημένον : ἀφῃρημένου ‖ πρίσμα : πρίσματος ‖ 7 τὸ om.

à la somme des parallélogrammes inscrits dans le segment compris entre la parabole et la droite EH ; il s'ensuit que le parallélogramme ΔH est inférieur aux trois demis de la somme des parallélogrammes contenus dans le segment compris entre la parabole et la droite EH, ce qui est impossible, puisqu'on a démontré ailleurs[1] que le parallélogramme ΔH est équivalent aux trois demis du segment compris entre la parabole et la droite EH. Par conséquent, le segment de cylindre n'est pas supérieur à la sixième partie du prisme entier.

Qu'il[2] soit donc, si possible inférieur à cette sixième partie ; le prisme découpé par le plan oblique est donc supérieur aux trois demis du segment de cylindre. Circonscrivons de nouveau (sc. au segment découpé du cylindre) une figure solide et inscrivons-lui en une autre de la manière indiquée ; nous démontrerons de la même manière que le rapport des prismes contenus dans le prisme découpé par le plan oblique aux prismes de la figure circonscrite au segment de cylindre est égal au rapport des parallèlelogrammes contenus dans le parallélogramme ΔH aux parallélogrammes de la figure circonscrite au segment compris entre la parabole et la droite EH[3] ; il s'ensuit[4] que le rapport de la somme des prismes contenus dans le prisme découpé par le plan oblique à la somme des prismes contenus dans la figure circonscrite au segment découpé du cylindre est égal au rapport de la somme des parallélogrammes contenus dans le parallélogramme ΔH à la somme des parallélogrammes contenus dans la figure circonscrite au segment compris entre la parabole et la droite EH, c'est-à-dire le rapport du prisme découpé par le plan oblique à la figure circonscrite au segment de cylindre sera égal au rapport du parallélogramme ΔH à la figure circonscrite au segment compris entre

1. Cf. *Quadr. parab.*, 24.
2. Nouvelle lacune, assez étendue ; le raisonnement a été reconstitué, en résumé, par Heiberg.
3. Fin de la lacune.
4. Cf. lemme 11.

. . . . ⟨στε-⟩ ρεὸν ἐτ . . . . . ⟨ἀ⟩ποτεμν . . . . σχῆμ⟨α⟩ . . . . τα ὀρθο . . . . περιγραφ . . . . ⟨τοῦ ἐγγρα-⟩ φέντος ἐν . . . . ἐπεὶ . . . . τμήματ . . . . ἐγγεγράφ⟨θω . . . . . ἐν τῷ τμή⟩ματι τῷ ⟨περιεχο- μένῳ ὑπό τε⟩ τῆς τοῦ ὀρθ⟨ογωνίου κώνου τομῆς⟩ καὶ τῆς ⟨ΕΗ εὐθείας⟩ . . . . γεγράφθ⟨ω⟩ . . . . τοῦ ὀρθ⟨ογω- νίου κώνου⟩ . . . . φὲν περι . . . . ⟨ἐγγεγραμ⟩μένον ἐν τ⟨ῷ⟩ . . . . . . τοῦ κυλίνδρ⟨ου⟩ . . . . . . τοῦ στερε⟨οῦ⟩ . . . . τοῦ κυλίν⟨δρου⟩ . . . . . τμήματ . . . . ἐστὶν καὶ . . . . γραμμέν . . . . εχομεν . . . . νη . . . . Η . . . . τιν . . . . προς τὸ . . . . τὸ ἐν τ⟨ῷ⟩ . . . . ⟨πε⟩ριεχομε . . . . γο . . . τῆς ΕΗ καὶ . . . . τοῖς λόγ⟨οις⟩ . . . . . . αμμέν . . . . τμήματος . . . . δρ . . . . νον ἀπὸ τῆς . . . . ⟨τ⟩ῆς πλευρ⟨ᾶς⟩ . . . . ἐν τῷ . . . . τετμή⟨σθω⟩ . . . . ἐχθήσ . . . . τὸ μεῖ⟨ζον⟩ . . . . ⟨εὐθ⟩είας καὶ πάντα τὰ πρίσματα τὰ ἐν τῷ πρίσματι τῷ ἀποτετμημένῳ ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου πρὸς πάντα τὰ πρίσματα τὰ ἐν τῷ σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κυλίνδρου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν πάντα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ πρὸς πάντα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐν τῷ σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας,

la parabole et la droite EH. Mais le prisme découpé par le plan oblique est supérieur aux trois demis de la figure solide circonscrite au segment de cylindre ; il[1] s'ensuit que le parallélogramme ΔH est lui aussi supérieur aux trois demis de la figure circonscrite au segment compris entre la parabole et la droite EH, ce qui est impossible, puisque nous avons démontré que le parallélogramme ΔH est supérieur aux trois demis du segment compris entre la parabole et la droite EH. Par conséquent, le segment de cylindre n'est pas non plus inférieur à la sixième partie du prisme entier ; n'étant ainsi ni supérieur ni inférieur, il est équivalent à la sixième partie du prisme, ce qu'il fallait démontrer.

1. Dernière lacune dans le texte grec de la prop. 15 ; la conclusion qui suit a été reconstituée par Heiberg.

τουτέστιν τὸ πρίσμα τὸ ἀποτετμημένον ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ τμῆμα τοῦ κυλίνδρου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας. Μεῖζον δέ ἐστι τὸ πρίσμα τὸ ἀποτετμημένον ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου ἢ ἡμιόλιον τοῦ στερεοῦ σχήματος τοῦ περιγε⟨γραμμένου περὶ τὸ τμῆμα τοῦ κυλίνδρου⟩ . . . .

5 περὶ τὸ τμῆμα τὸ περιεχόμενον suppl. Heiberg.

LE LIVRE DES LEMMES

NOTICE

Ce traité contient quinze propositions, assez élégantes, de géométrie élémentaire, dont les plus importantes, 4 à 6 et 14, traitent des propriétés de deux figures planes dont l'une, l'ἄρβηλος ou tranchet de cordonnier, est comprise entre trois demis-circonférences tangentes deux à deux, ayant leurs diamètres sur la même droite et telles que le diamètre de la plus grande est égal à la somme des diamètres des deux autres, et qu'elles sont toutes situées du même côté de la droite, et dont l'autre, le σάλινον[1], est formée de quatre demi-circonférences, également tangentes deux à deux, mais dont trois sont situées d'un même côté de la droite portant les diamètres, alors que la quatrième est située de l'autre côté.

L'authenticité du *Livre des lemmes* est douteuse. Si certaines des découvertes qui y sont réunies pourraient bien être d'Archimède, l'ensemble manque de cette liaison entre les propositions qui caractérise la manière du grand géomètre dans les travaux qu'on sait être de lui. Il est probable que ce traité a été, déjà sous sa forme grecque aujourd'hui perdue, l'œuvre d'un compilateur ayant puisé à différentes sources, dont peut-être Archimède.

Il est conservé dans la version arabe, annotée par Almochtasso-Abul-Hasan, du savant Thabit-Ben-Corrah, qui vécut à Bagdad au IXe siècle, et dont nous possédons

1. Sur ce mot, cf. la note à la prop. 14.

aussi des traductions arabes des *Éléments* d'Euclide, de l'*Almageste* de Ptolémée et des *Traités* des coniques d'Apollonius. Cette version arabe, dont il existe trois manuscrits à la bibliothèque Laurentienne, fut traduite en latin, une première fois par Graeves, Londres, 1657, avec un commentaire de Samuel Forster, et une seconde fois par l'orientaliste Abraham Ecchellensis, Florence, 1661, avec un commentaire de Borelli.

Dans cette édition, nous présentons le texte latin d'Ecchellensis, accompagné du texte grec reconstitué, en 1965, par E. Stamatis[1].

1. Cf. 'Ανακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου... δεκαπέντε θεωρημάτων τοῦ 'Αρχιμήδους κτλ., Bulletin de la Soc. Math. de Grèce, Nouvelle série, t. 6 II, fasc. 2, 1965, p. 265-297.

LE LIVRE DES LEMMES

1.

Si deux cercles sont tangents, comme le sont au point E les deux cercles AEB et CED, si leurs diamètres sont parallèles, comme le sont les deux diamètres AB et CD, et si on joint les deux points B et D au point de contact E par les droites DE et BD, la ligne BE sera une droite[1].

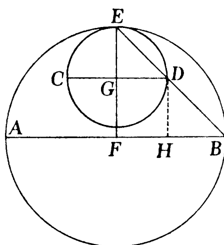


Fig. 135

Soit les deux centres G et F ; menons GF, prolongeons GF jusqu'à E, et menons la parallèle DH à GF. Comme

1. Dans son texte, accompagné de figures où les lettres latines sont remplacées par des lettres de l'alphabet grec, M. E. Stamatis a restitué le raisonnement complet des propositions, dont les versions arabe et latine ne donnent qu'un abrégé. Notre traduction est celle du texte latin.

LIBER ASSUMPTORUM

I.

Si mutuo se tangant duo circuli, ut duo circuli AEB, CED in E, fuerintque eorum diametri parallelae, ut sunt duae diametri AB, CD, et iungantur duo puncta B, D et contactus E <rectis> DE, BD, erit linea BE recta.

α'.

Εἴ κα ᾖ δύο κύκλοι ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐντός, διάμετροι δὲ αὐτῶν παράλληλοι, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ἀπὸ τοῦ σαμείου ἁφῆς καὶ τῶν περάτων τῶν διαμέτρων δύο εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας.

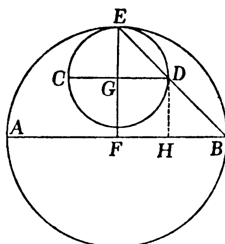


Fig. 135

Sint duo centra G, F, et iungatur GF, et producamus ad E, et educamus DH parallelam ipsi GF.

Ἔστωσαν δύο κύκλοι, ὧν κέντρα τὰ Z, H, ἐπιψαύοντες ἀλλάλων κατὰ τὸ E σαμεῖον, διάμετρος δὲ ἁ AB παρὰ

HF est égal à GD et GD égal à EG, on conclut de l'égalité de FB et de FE que GF, c'est-à-dire DH, est égal à HB et que les deux angles HDB et HBD sont égaux. Puisque, de plus, les deux angles EGD et EFB sont droits et que les deux angles EGD et DHB sont égaux, les deux angles GED et GDE sont égaux entre eux et égaux aux angles HDB et HBD ; l'angle EDG est donc égal à l'angle DBF. Ajoutons de part et d'autre l'angle GDB ; la somme des deux angles GDB et FBD (égale à un angle bidroit)[1] est donc égale à la somme des angles GDB et GDE, d'où il suit que cette dernière somme est elle aussi égale à un angle bidroit et que la ligne EDB est une droite, et c'est ce que nous avons voulu démontrer[2].

2.

Soit le demi-cercle CBA, DC et DB deux tangentes,

1. Cf. Eucl. I, 29.

2. Cette proposition est utilisée par Pappus, *Coll. IV*, 23, p. 214 de l'édition F. Hultsch. Au VII[e] livre de la *Collection*, prop. 175, p. 840, Pappus démontre que la prop. 1 du *Livre des lemmes* est vraie aussi dans le cas où les deux cercles sont tangents extérieurement, ce que note aussi le commentateur arabe Almochtasso.

Et quia HF aequalis est ipsi GD, suntque GD, EG aequales, ergo ex aequalibus FB, FE remanebunt GF, nempe DH et HB, quae erunt aequales, atque duo anguli HDB, HBD aequales. Et quia duo anguli EGD, EFB sunt recti, atque duo anguli EGD, DHB sunt aequales, remanebunt duo anguli GED, GDE, qui inter se et duobus angulis HDB, HBD aequales erunt ; ergo angulus EDG aequalis est angulo DBF. Et comprehensus angulus GDB est communis ; ergo erunt duo anguli GDB, FBD, (qui sunt pares duobus rectis), aequales duobus angulis GDB, GDE. Igitur ipsi quoque sunt aequales duobus rectis ; ergo linea EDB est recta. Et hoc est quod uoluimus.

διάμετρον τὰν ΓΔ · φαμὶ δή, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΔ, ΔΒ εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΖΗ καὶ ἐκϐεϐλήσθω ποτὶ τὸ Ε, ἄχθω δὲ ἁ ΔΘ παρὰ τὰν ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΕ ἴσαι ἐντὶ καὶ ἁ ΗΔ τᾷ ΖΘ, κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ΖΘ, τουτέστιν ἁ ΗΕ · λοιπαὶ ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΘΔ, ΘΒ ἴσαι ἀλλαλαις ἐντί · γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΘΔΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΘΒΔ, τουτέστιν τᾷ ὑπὸ ΗΔΕ, ἐστὶν ἴσα · κοινὰ ποτικείσθω γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΒ · συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΒ, ΔΒΖ συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ ΗΔΒ, ΕΔΗ ἐστὶν ἴσα · ἔστι δὲ συναμφότερος ἁ ὑπὸ ΗΔΒ, ΔΒΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα · συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΒ, ΕΔΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἐστιν ἴσα · ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐντὶ εὐθεῖαι αἱ ΕΔ, ΔΒ · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

2.

Sit CBA semicirculus, quem DC, DB tangant, et

β′.

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι

et soit BE perpendiculaire à AC ; joignons A à D par la droite AD ; BF sera alors égal à FE.

Fig. 136

Démonstration. Menons la droite AB, prolongeons la jusqu'à sa rencontre avec le prolongement de CD au point G, et menons la droite CB. L'angle CBA étant inscrit dans un demi-cercle, il sera droit[1] ; il s'ensuit que l'angle CBG est droit[2] et que DBEC est un parallélogramme rectangle[3]. Dans le triangle rectangle GBC, BD est donc la perpendiculaire abaissée de B sur la base, et BD et DC seront égaux comme étant des tangentes au cercle ; CD est donc aussi égal à DG, comme nous l'avons démontré dans nos propo-

1. Cf. Eucl. III, 31.
2. Cf. Eucl. I, 13.
3. Ceci n'est vrai que dans l'hypothèse, admise dans la figure, que B est le milieu de la demi-circonférence ABC. La proposition a été démontrée pour le cas général d'un point B quelconque sur la demi-circonférence ABC par Torelli et Barrow et, plus récemment, par Th. Heath ; sur ces trois auteurs cf. l'Introduction.

BE perpendicularis super AC, et iungamus AD ; erit BF aequalis ipsi FE.

αὐτοῦ αἱ ΔΒ, ΔΓ, ἁ δὲ ΒΕ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΑΓ, ἐπεζεύχθω δὲ ἁ ΑΔ· φαμὶ δὴ τὰν ΒΖ ἴσαν εἶμεν τᾷ ΖΕ.

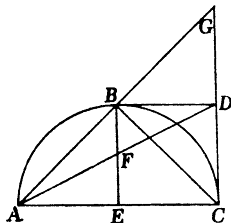


Fig. 136

Demonstratio. Iungamus AB eamque producamus in directum et educamus CD quousque illi occurrat in G, et iungamus CB. Et quia angulus CBA est in semicirculo, erit rectus ; remanet CBG rectus, et DBEC est parallelogrammum rectangulum. Ergo in triangulo GBC rectangulo educitur perpendicularis BD ex B erecta super basim, et BD, DC erunt aequales eo quod tangunt circulum ; ergo CD est etiam aequalis

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΑΒ καὶ ἐκβληθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η σαμεῖον καὶ ἄχθω ἁ ΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν γωνία ἁ ὑπὸ ΓΒΑ ὀρθά ἐστιν, ἐσσεῖται καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΒΗ ὀρθά· ἔστι δὲ καὶ εὐθεῖα ἁ ΒΔ τᾷ ΔΓ ἴσα· ἐσσεῖται ἄρα καὶ εὐθεῖα ἁ ΔΗ τᾷ ΔΒ,

sitions sur les rectangles[1]. Comme dans le triangle GAC la droite BE est parallèle à la base et que nous avons mené du milieu D (sc. de la base CG) la droite DA coupant la parallèle BE en F, BF sera égal à FE, et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

3.

Soit CA un segment de cercle, B un point situé sur sa circonférence, et BD la perpendiculaire (sc. abaissée de B) à (sc. la corde) AC ; que le segment de droite DE soit égal à DA et l'arc BF égal à l'arc BA ; la droite CF sera égale à CE[2].

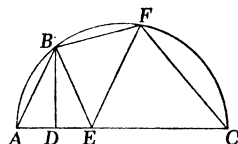


Fig. 137

Démonstration. Menons les droites AB, BF, FE et

1. Seuls les auteurs arabes semblent avoir connu un livre d'Archimède sur les rectangles.

2. Sur la figure du ms., l'arc ABFC est un demi-cercle ; mais la proposition est vraie aussi si ABFC est un arc quelconque. Ptolémée déduit de cette proposition, appliquée au cas particulier du demi-cercle, la détermination de la corde sous-tendant la moitié d'un arc dont on connaît la corde et le rayon, cf. *Almageste* I, 10, éd. Heiberg, p. 39.

ipsi DG, quemadmodum ostendimus in propositionibus, quas confecimus de rectangulis. Et quia in triangulo GAC linea BE educta est parallela basi, et iam educta est ex D semipartitione basis linea DA secans parallelam in F, erit BF aequalis ipsi FE. Et hoc est quod uoluimus.

τουτέστι τᾷ ΔΓ ἴσα. Καὶ ἐπεὶ ἁ ΒΕ παρὰ τὰν ΗΓ ἐστίν, ἐσσεῖται ἄρα καὶ ἁ ΒΖ τᾷ ΖΕ ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

3.

Sit CA segmentum circuli et B punctum super illud ubicunque et BD perpendicularis super AC et segmentum DE aequale DA et arcus BF aequalis arcui BA ; utique iuncta CF erit aequalis ipsi CE.

γ'.

Ἔστω τμᾶμα κύκλου τὸ ΑΓ καὶ ἀπὸ σαμείου τινος Β τᾶς περιφερείας ἄχθω τᾷ ΑΓ ποτ' ὀρθὰς ἁ ΒΔ, λελάφθω δὲ εὐθεῖα ἁ ΔΕ εὐθείᾳ τᾷ ΔΑ ἴσα καὶ περιφέρεια ἁ ΒΖ τᾷ ΑΒ· φαμὶ δή, ἐπιζευχθεῖσα ἁ ΓΖ εὐθεῖα τᾷ ΓΕ ἐστὶν ἴσα.

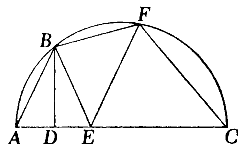


Fig. 137

Demonstratio. Iungamus lineas AB, BF, FE,

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΖ, ΖΕ, ΕΒ εὐθεῖαι·

EB. L'arc BA étant égal à l'arc BF, la corde AB sera égale à la corde BF. Puisque, d'autre part, (sc. dans les triangles ADB et EDB), AD est égal à ED, que les deux angles de sommet D sont droits, et que le côté DB leur est commun, AB est égal[1] à BE, d'où il suit que BF et BE sont égaux et que les deux angles BFE et BEF sont égaux. Comme, de plus, le quadrilatère CFBA est inscrit dans un cercle, la somme de l'angle CFB et de l'angle CAB qui lui est opposé, c'est-à-dire la somme des angles CFB et BEA, est égale à un angle bidroit[2] ; mais la somme des angles CEB et BEA est aussi égale à un angle bidroit ; par conséquent, les deux angles CFB et CEB sont égaux ainsi que, partant, les angles CFB et CEB ; il en résulte que les angles CFE et CEF sont égaux ; par conséquent CE est égal à CF, et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

1. Cf. Eucl. I, 4.
2. Cf. Eucl. III, 22.

EB. Et quia arcus BA aequalis est arcui BF, erit AB aequalis BF. Et quia AD aequalis est ED, et duo anguli D sunt recti, et DB communis, ergo AB aequalis est BE, et propterea BF, BE sunt aequales, et duo anguli BFE, BEF sunt aequales. Et quia quadrilaterum CFBA est in circulo, erit angulus CFB cum angulo CAB ipsi opposito, immo cum angulo BEA, aequalis duobus rectis. Sed angulus CEB cum angulo BEA aequales sunt duobus rectis ; ergo duo anguli CFB, CEB sunt aequales. Et remanent CFE, CEF aequales ; ergo CE aequalis est CF. Et hoc est quod uoluimus.

καὶ ἐπεὶ ἁ ΑΔ τᾷ ΔΕ ἐστὶν ἴσα, κοινὰ δὲ ἁ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΒ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΕΔΒ ἴσα· βάσις ἄρα ἁ ΕΒ βάσει τᾷ ΑΒ, τουτέστι τᾷ ΒΖ, ἐστὶν ἴσα· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΒΕΖ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΒΖΕ ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐπεὶ τετράπλευρον τὸ ΑΒΖΓ ἐν κύκλῳ ἐστίν, γωνίαι αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ ΓΖΒ, ΓΑΒ, τουτέστιν αἱ ὑπὸ ΓΖΒ, ΒΕΑ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί. Ἔστι δὲ καὶ συναμφότερος ἁ ὑπὸ ΓΕΒ, ΒΕΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα· κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ὑπὸ ΒΕΑ· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΓΖΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΓΕΒ ἐστὶν ἴσα· κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ὑπὸ ΒΖΕ, τουτέστιν ἁ ὑπὸ ΒΕΖ· λοιπαὶ ἄρα αἱ ποτὶ τᾷ βάσει τᾷ ΕΖ τριγώνου τοῦ ΕΓΖ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΖΕ, ΖΕΓ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί· πλευρὰ ἄρα ἁ ΖΓ πλευρᾷ τᾷ ΕΓ ἐστὶν ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

4.

Soit ABC un demi-cercle ; construisons sur le diamètre AC deux demi-cercles (sc. tangents entre eux), l'un (sc. sur) AD, l'autre (sc. sur) DC, et élevons la perpendiculaire DB (sc. à CA) ; la figure ainsi déterminée, appelée Arbelos par Archimède (c'est-à-dire l'aire comprise entre l'arc du grand demi-cercle et les circonférences des deux petits demi-cercles) est équivalente au cercle ayant pour diamètre la perpendiculaire DB.

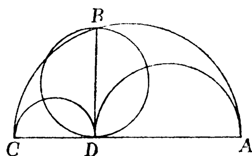


Fig. 138

Démonstration. Puisque DB est la moyenne proportion-

4.

Sit ABC semicirculus, et fiant super AC diametrum duo semicirculi, quorum unus AD, alter uero DC, et DB perpendicularis ; utique figura proueniens, quam uocat Archimedes Arbelon (est figura comprehensa ab arcu semicirculi maioris et duabus circumferentiis semiciculorum minorum) est aequalis circulo, cuius diameter est perpendicularis DB.

δ'.

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, γραφέωντι δὲ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἁμικύκλια ἐντός, ἀνα-στακῇ δὲ ἀπὸ τοῦ λαφθέντος σαμείου εὐθεῖα ποτὶ τᾷ περιφερείᾳ τᾷ διαμέτρῳ ποτ' ὀρθάς, σχῆμα τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον ἴσον ἐστὶ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ἀναστακεῖσα κάθετος.

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ σαμεῖόν τι ἐπὶ διαμέτρου τᾶς ΑΓ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ διαμέτρων τῶν ΓΔ, ΔΑ ἁμικύκλια ἀναγεγράφθων ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ σαμείου ἀνεστακέτω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΑΓ ἁ ΔΒ · φαμὶ δή, σχῆμα

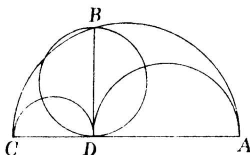


Fig. 138

Demonstratio. Quia linea DB media propor-

τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον,

nelle[1] entre DA et DC, le rectangle de côtés AD et DC sera équivalent[2] au carré sur DB. Ajoutons de part et d'autre le rectangle de côtés AD et DC et les deux carrés sur AD et sur DC ; le double du rectangle de côtés AD et DC, augmenté des deux carrés sur AD et sur DC, c'est-à-dire[3] le carré sur AC, sera alors équivalent au double du carré sur DB, augmenté des deux carrés sur AD et sur DC. Or le rapport des cercles est égal au rapport des carrés (sc. sur leurs diamètres)[4] ; il s'ensuit que le cercle de diamètre AC est équivalent à la somme du double du cercle de diamètre DB et des deux cercles de diamètres AD et DC, et que le demi-cercle de diamètre AC est équivalent à la somme du cercle de diamètre DB et des deux demi-cercles de diamètres AD et DC. Retranchons de part et d'autre les deux demi-cercles de diamètres AD et DC. La figure qui reste d'un côté, à savoir l'aire comprise entre les demi-cercles sur AC, AD et DC (et c'est là la figure appelée Arbelos par

1. Cf. Eucl. VI, 13.
2. Cf. Eucl. VI, 17.
3. Cf. Eucl. II, 4.
4. Cf. Eucl. XII, 2.

tionalis est inter duas lineas DA, DC, erit planum AD in DC aequale quadrato DB. Et ponamus AD in DC cum duobus quadratis AD, DC communiter ; fiet planum AD in DC bis cum duobus quadratis AD, DC, nempe quadratum AC, aequale duplo quadrati DB cum duobus quadratis AD, DC. Et proportio circulorum eadem est ac proportio quadratorum ; ergo circulus, cuius diameter est AC, aequalis est duplo circuli, cuius diameter est DB, cum duobus circulis, quorum diametri sunt AD, DC, et semicirculus AC aequalis est circulo, cuius diameter est DB, cum duobus semicirculis AD, DC. Et auferamus

τουτέστι τοῦ μείζονος ἁμικυκλίου καὶ τῶν δύο ἀναγραφέντων ἐντός, ὅπερ ἄρβηλος καλείσθω, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ΔΒ, ἴσον ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἑξῆς ἀνάλογόν ἐντι, ἐσσεῖται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τῷ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ἴσον· κοινὸν ποτικείσθω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τᾶς ὅλας τετράγωνον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ, τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἐπεὶ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλάλους ὡς τὰ ἀπὸ τᾶν διαμέτρων τετράγωνά ἐντι, ἐσσεῖται δὴ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ ΑΓ, δυσὶ κύκλοις, ὧν διάμετρος ἁ ΔΒ, καὶ δυσὶ κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ ΑΔ, ΔΓ, ἴσος, τουτέστιν ἁμικύκλιον τὸ ΑΓ ἴσον κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ΔΒ, καὶ δυσὶν ἁμικυκλίοις, ὧν διάμετροι αἱ ΑΔ, ΔΓ· κοινὸν ἀφαιρήσθω ἁμικύκλια τὰ ΑΔ, ΔΓ· λοιπὸν ἄρα

Archimède), est alors équivalente (sc. à la figure qui reste de l'autre côté, à savoir) au cercle de diamètre DB, et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

5.

Si on se donne sur le diamètre AB d'un demi-cercle un point quelconque C, si on décrit les deux demi-cercles sur AC et sur CB et qu'on élève en C la perpendiculaire CD sur AB, et si on construit de part et d'autre de cette perpendiculaire les deux cercles tangents à la perpendiculaire et aux demi-cercles, ces deux cercles sont égaux.

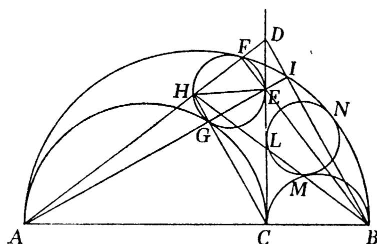


Fig. 139

duos semicirculos AD, DC communiter; remanet figura, quam continent semicirculi AC, AD, DC (et est figura quam uocavit Archimedes Arbelos), aequalis circulo, cuius diameter est DB. Et hoc est quod uoluimus.

χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ περιφερειῶν τᾶν ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ, ὅπερ ἄρβηλος καλεῖται, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ΔΒ, ἐστὶν ἴσον· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

5.

Si fuerit semicirculus AB, et signatum fuerit in eius diametro punctum C ubicunque, et fiant super diametrum duo semicirculi AC, CB, et educatur ex C perpendicularis CD super AB, et describantur ad utrasque partes duo circuli tangentes illam et tangentes semicirculos, utique illi duo circuli sunt aequales.

ε'.

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, καὶ γραφέωντι ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἁμικύκλια ἐντός, ἀνασтакῇ δὲ ἀπὸ τοῦ σαμείου εὐθεῖα τᾷ διαμέτρῳ ποτ' ὀρθάς, καὶ δύο κύκλοι γραφέωντι ἐπ' ἀμφότερα τᾶς ἀνεσтακούσας ἐπιψαύοντες αὐτᾶς καὶ τῶν ἁμικυκλίων, οἱ γραφέντες κύκλοι ἐσσοῦνται ἀλλάλοις ἴσοι.

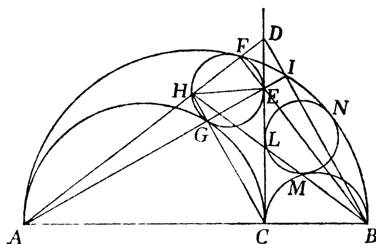


Fig. 139

Démonstration. Que l'un des deux cercles soit tangent à DC en E, au demi-cercle sur AB en F et au demi-cercle sur AC en G ; menons le diamètre HE ; il sera parallèle au diamètre AB parce que les deux angles HEC et ACE sont droits[1] ; menons FH et HA ; d'après la proposition[2] 1, la ligne AF est une droite ; les droites AF et CE se rencontreront en D, parce qu'elles sont menées sous les angles A et C dont la somme est inférieure à deux angles droits[3]. Menons aussi FE et EB ; la ligne EFB est alors une droite, d'après ce que nous avons dit[4], et elle est perpendiculaire à AD, parce que l'angle AFB est droit comme inscrit[5] dans la demi-circonférence sur AB. Menons maintenant HG et GC ; la ligne HC sera également une droite, et de même[6] la ligne EA, si nous menons EG et GA ; prolongeons EA

1. Cf. Eucl. I, 28.
2. C'est-à-dire d'après la prop. 1 appliquée à des cercles tangents extérieurement.
3. Cf. Eucl. I, post. 5.
4. Cf. prop. 1.
5. Cf. Eucl. III, 31.
6. D'après la prop. 1 généralisée.

Demonstratio. Sit alter circulorum tangens DC in E et semicirculum AB in F et semicirculum AC in G, et educamus diametrum HE ; erit parallela diametro AB, eo quod duo anguli HEC, ACE sunt recti. Et iungamus FH, HA ; ergo linea AF est recta, uti dictum est in propositione I. Et occurrent AF, CE in D, eo quod egrediuntur ab angulis A, C, minoribus duobus rectis.

Et iungamus etiam FE, EB ; ergo EFB est etiam recta, ut diximus, et perpendicularis super AD, eo quod angulus AFB est rectus, quia cadit in semicirculum AB. Et iungamus HG, GC ; erit HC etiam recta. Et iungamus EG, GA ; erit EA recta ; et producamus eam ad I et iungamus BI, quae erit etiam perpendicularis super AI, et iungamus

Ἔστω ἀμικύκλιον, οὗ διάμετρος ἁ AB, σαμεῖον δέ τι ἐπ' αὐτᾶς τὸ Γ· ἀναγεγράφθω δὲ ἀπὸ τμαμάτων τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀμικύκλια ἐντός, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σαμείου ἀνεστακέτω ποτ' ὀρθὰς διαμέτρῳ τᾷ AB ἁ ΓΔ, γεγράφθων δὲ δύο κύκλοι ἐπ' ἀμφότερα τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας ἐπιψαύοντες τᾶς τε ἀνεστακούσας καὶ τῶν ἀμικυκλίων· φαμὶ δή, οἱ γραφέντες κύκλοι ἴσοι ἀλλάλοις ἐντί.

Ἔστω γὰρ πρότερον κύκλος ὁ ἐπιψαύων τᾶς ΓΔ κατὰ τὸ Ε σαμεῖον καὶ ἀμικυκλίου μὲν τοῦ ΑΓ κατὰ τὸ Η, ἀμικυκλίου δὲ τοῦ AB κατὰ τὸ Ζ, ἄχθω δὲ διάμετρος τοῦ κύκλου ἁ ΘΕ· ἐπιζευχθεῖσαι δὴ αἱ ΑΘ, ΘΖ εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, ἐκβληθεῖσαι δὲ αἱ ΑΖ, ΓΕ εὐθεῖαι συμβαλέτωσαν κατὰ τὸ Δ σαμεῖον· ὁμοίως δὴ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΖΕ, ΕΒ ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, καὶ αἱ ΘΗ, ΗΓ, καὶ αἱ ΕΗ, ΗΑ, ἐκβεβλήσθω δὲ ἁ ΑΕ ἐπὶ τὸ Ι σαμεῖον,

jusqu'à I et menons BI, qui sera perpendiculaire[1] à AI ; menons DI. Du moment, dès lors, que AD et AB sont deux droites, que DC est la perpendiculaire abaissée de D sur AB et BF la perpendiculaire abaissée de B à DA, que ces deux perpendiculaires se coupent en E, et que, enfin, AE prolongé jusqu'à I est perpendiculaire à BI, la ligne BID sera une droite, comme nous l'avons démontré dans les propositions établies par nous dans le traité sur les triangles rectangles[2]. Comme les deux angles AGC et AIB sont droits, BD et CG sont parallèles[3], de façon que le rapport de AD à DH, égal au rapport de AC à HE, est égal[4] au rapport de AB à BC ; il s'ensuit que le rectangle de côtés AC et CB est équivalent[5] au rectangle de côtés AB et HE. On démontre de la même manière, pour le cercle LMN, que le rectangle de côtés AC et CB est équivalent au rectangle ayant pour côtés AB et le diamètre de ce cercle, et on démontre aussi, partant, que les diamètres des deux cercles EFG et LMN sont égaux ; par conséquent ces deux cercles sont égaux, ce que nous avons voulu démontrer.

1. Cf. Eucl. III, 31.
2. Allusion, d'après Heiberg, *Quaestiones Archimedeae*, Copenhague 1879, p. 30, à un commentaire d'un livre d'Archimède sur les triangles rectangles. Ce livre n'est mentionné que par les Arabes.
3. Cf. Eucl. I, 28.
4. Cf. Eucl. VI, 2.
5. Cf. Eucl. VI, 16.

DI. Et quia AD, AB sunt duae rectae et educta ex D ad lineam AB perpendicularis DC et ex B ad DA perpendicularis BF, quae se mutuo secant in E, et educta AE ad I est perpendicularis super BI, erunt BID rectae, quemadmodum ostendimus in propositionibus, quas confecimus in expositione tractatus de triangulis rectangulis. Et quia duo anguli AGC, AIB sunt recti, utique BD, CG sunt parallelae, et proportio AD ad DH, quae est ut AC ad HE, est ut proportio AB ad BC ; ergo rectangulum AC in CB aequale est rectangulo AB in HE. Et similiter demonstratur in circulo LMN quod rectangulum AC in CB aequale sit rectangulo AB in suam diametrum, et demonstratur inde etiam quod duae diametri circulorum EFG, LMN sint aequales ; ergo illi duo circuli sunt aequales. Et hoc est quod uoluimus.

ἄχθω δὲ ἁ ΒΙ εὐθεῖα καὶ ἁ ΖΔ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΔ, ΑΒ εὐθεῖαί ἐντι καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σαμείου τᾷ ΑΒ ἆκται ποτ' ὀρθὰς ἁ ΔΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΔΑ ἁ ΒΖ τέμνουσα τὰν ΔΓ κατὰ τὸ Ε, εὐθεῖα δὲ ἁ ΑΕΙ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΒΙ ἐστίν, ἐσσοῦνται ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΙ, ΙΔ ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, ὡς παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων δέδεικται. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἁ ΒΔ παρὰ τὰν ΓΗ ἐστίν, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΘ, ὃν ἔχει ἁ ΑΓ ποτὶ τὰν ΘΕ, τουτέστιν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΓ · τὸ ἄρα ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΒ τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΘΕ ἐστὶν ἴσον · ὁμοίως δὴ δείξομες ὅτι ἐν κύκλῳ τῷ ΛΜΝ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΒ τῷ ὑπὸ ΑΒ καὶ τᾶς διαμέτρου τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἴσον ἐστίν · αἱ διάμετροι ἄρα κύκλων τῶν ΕΖΗ, ΛΜΝ ἴσαι ἐντί, τουτέστιν οἱ δύο κύκλοι ἴσοι ἐντί · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

6.

Si[1] on prend sur le diamètre d'un demi cercle ABC un point D de manière que AD soit égal aux trois demis de DC, si on décrit sur AD et sur DC deux demi-cercles, qu'on place entre les trois demi-cercles le cercle EF de manière qu'il leur soit tangent et qu'on mène dans ce cercle le diamètre EF parallèle au diamètre AC, il faut trouver le rapport du diamètre AC au diamètre EF.

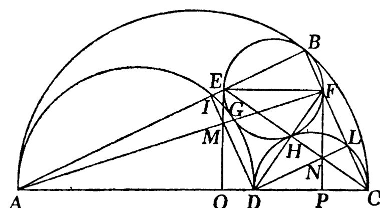


Fig. 140

Menons les deux droites AE et EB ainsi que les deux droites CF et FB ; CB et AB seront alignés, comme nous l'avons dit dans la première proposition. Menons aussi les deux lignes FGA et EHC qu'on démontrera

1. Cf. Pappus IV, 26 ; p. 224 sq.

6.

Si fuerit semicirculus ABC, et in eius diametro sumatur punctum D, et fuerit AD ipsius DC sesquialtera, et describantur super AD, DC duo semicirculi, et ponatur circulus EF inter tres semicirculos tangens eos, et educatur diameter EF in illo parallela diametro AC, reperiri debet proportio diametri AC ad diametrum EF.

ϛ′.

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, καὶ γραφέωντι ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἁμικύκλια ἐντός, γραφῇ δὲ ἐν τῷ ἀρβήλῳ κύκλος ἐπιψαύων τῶν τριῶν ἁμικυκλίων, τὸν λόγον τᾶς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἁμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου εὑρεῖν.

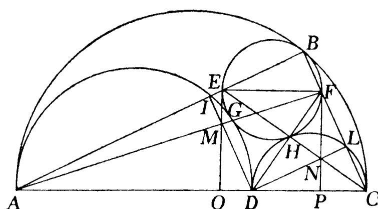


Fig. 140

Iungamus enim duas lineas AE, EB et duas lineas CF, FB ; erunt CB, AB rectae, ut dictum est in prima propositione. Describamus etiam duas

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, σαμεῖον δέ τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου τὸ Δ καὶ πεποιήσθω οὕτως, ὥστε τὸ μεῖζον τμᾶμα τὸ ΑΔ ἐλάσσονος τοῦ ΔΓ ἁμιόλιον εἶμεν, καὶ ἀπὸ τμαμάτων τῶν ΑΔ, ΔΒ ἀναγεγράφθων ἁμικύ-

être[1], elles aussi, des droites, de même que les lignes DE et DF ; menons DI et DL ainsi que EM et FN et prolongeons ces dernières droites jusqu'aux points O et P. Du moment que dans le triangle AED la droite AG est perpendiculaire à ED et DI perpendiculaire à AE, et que ces deux perpendiculaires se coupent en M, la droite EMO sera aussi perpendiculaire (sc. à AC), comme nous l'avons démontré dans notre exposé des propriétés des triangles, dans une démonstration à laquelle nous avons déjà fait allusion dans la proposition précédente ; pour les mêmes raisons, FP aussi sera perpendiculaire à CA. Et comme les deux angles de sommets L et B sont droits[2], DL sera parallèle à AB et DI à CB ; il s'ensuit que AD est à DC comme[3] AM est à FM, c'est-à-dire comme AO est à OP, et que CD est à DA comme CN est à NE, c'est-à-dire comme CP est à PO. Or AD est égal (sc. par hypothèse) aux trois demis de DC ; il s'ensuit que AO est égal aux trois demis de OP, et que OP est égal aux trois demis de CP. Les trois segments de droite AO, OP et PC sont donc proportionnels, et dans la même mesure, dans laquelle

1. D'après la prop. 1 généralisée.
2. Cf. Eucl. III, 31.
3. Cf. Eucl. VI, 2.

lineas FGA, EHC, ostenderurque esse quoque rectas ; similiter duas lineas DE, DF, et iungamus DI, DL et EM, FN et producamus eas ad O, P. Et quia in triangulo AED AG est perpendicularis ad ED, et DI est quoque perpendicularis ad AE, et iam se mutuo secuerunt in M, ergo EMO erit etiam perpendicularis, quemadmodum ostendimus in expositione, quam confecimus de proprietatibus triangulorum, et cuius demonstratio iam quidem praecessit in superiori propositione ; similiter quoque erit FP perpendicularis super CA. Et quia duo anguli, qui sunt apud L et B, sunt recti, erit DL parallela ipsi AB, et pariter DI ipsi CB ; igitur proportio AD ad

κλια, γεγράφθω δὲ ἐν τῷ ἀρβήλω κύκλος ὁ EZ ἐπιψαύων τῶν τριῶν ἁμικυκλίων, καὶ ἄχθω διάμετρος αὐτοῦ παρὰ τὰν ΑΓ ἁ EZ. Εὑρεῖν τὸν λόγον διαμέτρου τᾶς ΑΓ ποτὶ διάμετρον τὰν EZ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ AE, EB εὐθεῖαι καὶ αἱ ΓZ, ZB· εὐθεῖαι δή ἐντι αἱ AB, ΓB, ὡς ἐν τοῖς πρότερον ἐδείχθη. Ἐπεζεύχθωσαν ἔτι αἱ ZHA, EΘΓ· δείκνυνται δὴ αὗται εὐθεῖαι οὖσαι· ἔτι δὲ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔE, ΔZ, καὶ αἱ ΔI, ΔΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ EM, ZN ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ O, P σαμεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ AEΔ ἁ AH τᾷ EΔ ποτ' ὀρθάς ἐστιν, καὶ ἁ ΔI τᾷ AE, τέμνοντι δὲ ἀλλάλας κατὰ τὸ M σαμεῖον, ἁ EMO τᾷ ΑΓ ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς, ὡς παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ τριγώνων ἐδείχθη καὶ τῷ πρότερον ὑπέκειτο· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἁ ZNP τᾷ ΓA ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς· ἔστι δὲ εὐθεῖα ἁ ΔΛ παρὰ τὰν AB καὶ ἁ ΔI παρὰ τὰν ΓB· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει

PC est égal à quatre, OP sera égal à six, AO égal à neuf, et CA égal à dix-neuf. Et comme PO est égal à EF, AC sera à EF comme dix-neuf est à six[1]. Nous trouvons ainsi le rapport cherché. Et même si le rapport de AD à DC était quelconque (sc. au lieu d'être égal au rapport de trois à deux), par exemple celui de quatre à trois ou de cinq à quatre ou tout autre rapport, on jugerait et raisonnerait comme nous l'avons fait. Et c'est ce que nous avons voulu montrer.

1. On a, en effet, d'après le théorème de Thalès, $\frac{AD}{DC} = \frac{AM}{FM} = \frac{AO}{OP}$, et $\frac{CD}{DA} = \frac{CN}{NE} = \frac{CP}{PO}$; par hypothèse $\frac{AD}{DC} = \frac{3}{2}$, d'où $\frac{AO}{OP} = \frac{3}{2}$ et $\frac{CP}{PO} = \frac{2}{3}$; en posant $PC = 4$, on a $OP = \frac{3}{2} PC = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$; $AO = \frac{3}{2} OP = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9$, et $CA = AO + OP + PC = 9 + 6 + 4 = 19$; par conséquent $\frac{CA}{OP} = \frac{19}{6}$, et, comme $OP = EF$, $\frac{CA}{EF} = \frac{19}{6}$.

DC est, ut proportio AM ad FM, immo ut proportio AO ad OP, et proportio CD ad DA, ut proportio CN ad NE, immo ut proportio CP ad PO. Et erat AD sesquialtera DC; ergo AO est sesquialtera OP et OP sesquialtera CP. Ergo tres lineae AO, OP, PC sunt proportionales, et in eadem mensura, in qua est PC quattuor, erit OP sex et AO nouem et CA nouendecim. Et quia PO aequalis est EF, erit proportio AC ad EF ut nouendecim ad sex. Igitur reperimus dictam proportionem. Etiam si fuerit AD ad DC qualiscunque, ut sesquitertia aut sesquiquarta aut alia, erit iudicium et ratio uti dictum est. Et hoc est quod uoluimus.

ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, ὃν ἔχει ἁ ΑΜ ποτὶ τὰν ΜΖ, τουτέστιν ἁ ΑΟ ποτὶ τὰν ΟΡ, καὶ ἁ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΑ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἔχει ἁ ΓΝ ποτὶ τὰν ΝΕ, τουτέστιν ἁ ΓΡ ποτὶ τὰν ΡΟ· ἦν δὲ ἁ ΑΔ ἁμιόλιος τᾶς ΔΓ· καὶ ἁ ΑΟ ἄρα τᾶς ΟΡ ἐστὶν ἁμιόλιος, καὶ ἁ ΟΡ τᾶς ΓΡ· εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΑΟ, ΟΡ, ΡΓ ἑξῆς ἀνάλογόν ἐντι, ἆν ἁ μὲν ΡΓ ἴσα γίνεται τέσσαρα, ἁ δὲ ΟΡ ἕξ, ἁ δὲ ΑΟ ἐννέα, ἁ δὲ ΓΑ ἐννεακαίδεκα. Ἔστι δὲ ἁ ΡΟ τᾷ ΕΖ ἴσα· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΑΓ ποτὶ τὰν ΕΖ, ὃν ἔχει τὰ ἐννεακαίδεκα ποτὶ τὰ ἕξ· καί ἐστιν ἁ ΑΓ διάμετρος ἁμικυκλίου τοῦ ΑΒΓ, ἁ δὲ ΕΖ κύκλου τοῦ ΕΒΖ· εὑρέθη ἄρα ὁ αἰτούμενος λόγος. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται εἴ κα ὁ λόγος τᾶς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἁμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου ἐπιμόριος ᾖ.

7.

Si on circonscrit à un carré un cercle et si on y inscrit un autre cercle, le cercle circonscrit sera équivalent au double du cercle inscrit.

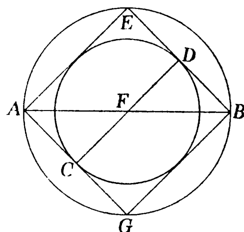


Fig. 141

Soit donc AB le cercle comprenant en lui le carré AB, et CD le cercle inscrit ; soit AB la diagonale du carré et le diamètre du cercle circonscrit ; menons dans le cercle inscrit un diamètre CD parallèle au côté AE qui lui est égal. Comme le carré sur AB est équivalent au double[1] du carré sur AE, c'est-à-dire du carré sur DC, et que le rapport des carrés sur les diamètres des cercles

1. Cf. Eucl. I, 47.

7.

Si circulus circa quadratum descriptus fuerit, et alius intra illum, utique erit circumscriptus duplus inscripti.

ζ′.

Ὁ τετραγώνῳ περιγεγραμμένος κύκλος διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐστίν.

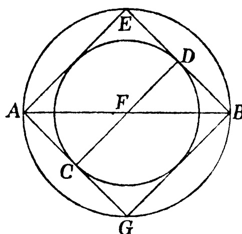


Fig. 141

Sit itaque circulus comprehendens quadratum AB circulus AB et inscriptus CD, et sit diameter quadrati AB, et est diameter circuli circumscripti, et educamus CD diametrum circuli inscripti parallelam ipsi AE, quae est ei aequalis. Et quia quadratum AB duplum est quadrati AE siue DC, et proportio quadratorum ex diametris circulorum est

Ἔστω γὰρ κύκλος ὁ AB περὶ τετράγωνον τὸ AB καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένος κύκλος ὁ ΓΔ, διάμετρος δὲ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου ἁ AB, ἄχθω δὲ διάμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἁ ΓΔ παρὰ τὰν AE· φαμὶ δή, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐστὶ διπλασίων.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τᾶς AB διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τᾶς AE, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ, οἱ κύκλοι δέ ἐντι ὡς τὰ

est égal au rapport des cercles[1], le cercle de diamètre AB est équivalent au double du cercle de diamètre CD, ce que nous avons voulu démontrer.

8.

Si on prolonge une corde quelconque AB d'un cercle, si on porte sur le prolongement un segment de droite BC égal au rayon du cercle, si on joint C au centre D du cercle par la droite CD et qu'on prolonge CD jusqu'au point E (sc. du cercle), l'arc AE sera triple de l'arc BF.

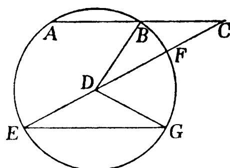


Fig. 142

Menons la parallèle EG à AB et les droites DB et DG. Comme les deux angles DEG et DGE sont égaux, l'angle GDC sera double[2] de l'angle DEG. D'autre

1. Cf. Eucl. XII, 2.
2. Cf. Eucl. I, 32.

eadem proportioni circuli ad circulum, igitur circulus AB duplus est circuli CD. Et hoc est quod uoluimus.

ἀπὸ τᾶν διαμέτρων αὐτῶν τετράγωνα, ἐσσεῖται ἄρα καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλασίων· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

8.

Si egrediatur in circulo linea AB ubicunque et producatur in directum, et ponatur BC aequalis semidiametro circuli, et iungatur ex C ad centrum circuli, quod est D, et producatur ad E, erit arcus AE triplus arcus BF.

η'.

Εἴ κα ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις AB προσαρμοσμένα ᾖ, ἐκβληθῇ δὲ κατὰ τὸ Γ σαμεῖον, ὥστε τὰν ΒΓ εὐθεῖαν τᾷ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαν εἶμεν, διαχθῇ δὲ εὐθεῖά τις ἀπὸ τοῦ Γ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ E σαμεῖον, ἐσσεῖται περιφέρεια ἁ AE περιφερείας τᾶς BZ τριπλασίων.

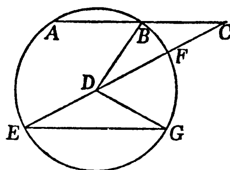


Fig. 142

Educamus igitur EG parallelam ipsi AB, et iungamus DB, DG, et quia duo anguli DEG, DGE sunt aequales, erit angulus GDC duplus anguli DEG. Et quia angulus

Ἄχθω γὰρ ἁ EH παρὰ τὰν AB καὶ ἐπεζεύχθων αἱ ΔΒ, ΔΗ. Ἐπεὶ οὖν γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΓΔ, ΒΔΓ, ΔΕΗ, ΔΗΕ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνία δὲ ἁ ὑπὸ ΓΔΗ γωνίας τᾶς ὑπὸ ΔΕΗ ἐστὶ διπλα-

part, l'angle BDC étant égal à l'angle BCD et l'angle CEG égal[1] à l'angle ACE, l'angle GDC sera double de l'angle CDB, l'angle entier BDG sera triple de l'angle BDC, et l'arc BG, qui est égal à l'arc AE, sera triple[2] de l'arc BF, ce que nous avons voulu démontrer.

9.

Si dans un cercle deux cordes AB et CD ne passant pas par le centre se coupent à angle droit, la somme des deux arcs AD et CB est égale à la somme des deux arcs AC et DB.

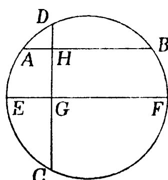


Fig. 143

Menons le diamètre EF parallèle à AB ; soit G le point où ce diamètre divise CD en deux parties égales ; EC sera alors égal[3] à ED. Puisque les deux

1. Cf. Eucl. I, 29.
2. Cf. Eucl. III, 26.
3. Cf. Eucl. III, 3.

BDC aequalis est angulo BCD, et angulus CEG aequalis est angulo ACE, erit angulus GDC duplus anguli CDB et totus angulus BDG triplus anguli BDC, et arcus BG aequalis arcui AE triplus est arcus BF. Et hoc est quod uoluimus.

σίων, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΒΔΗ γωνίας τᾶς ὑπὸ ΒΔΓ τριπλασίων. Ἐσσεῖται ἄρα περιφέρεια ἁ ΒΗ, τουτέστιν ἁ ΑΕ, περιφερείας τᾶς ΒΖ τριπλασίων · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

9.

Si mutuo se secuerint in circulo duae lineae AB, CD (sed non in centro) ad angulos rectos, utique duo arcus AD, CB sunt aequales duobus arcubus AC, DB.

θ′.

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωντι ἀλλάλας ποτ' ὀρθὰς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, δύο αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι δυσὶ ταῖς ἀπεναντίον ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

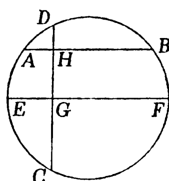


Fig. 143

Educamus diametrum EF parallelam ipsi AB, quae secet CD bifariam in G ; erit EC aequalis ipsi ED. Et quia tam

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τέμνουσαι ἀλλάλας ποτ' ὀρθάς, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι · φαμὶ δή, δύο αἱ

arcs EDF et ECF sont des demi-circonférences, et que l'arc ED est égal à la somme des arcs EA et AD, la somme des arcs CF, EA et AD sera égale à une demi-circonférence. Or l'arc EA est égal à l'arc BF ; il s'ensuit que la somme des arcs CB et AD est égale à une demi-circonférence. Par conséquent, la somme des deux arcs EC et EA, c'est-à-dire l'arc AC, augmentée de l'arc DB, sera égale à une demi-circonférence, et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

10.

Soit un cercle ABC, DA et DC deux tangentes et DB une sécante de ce cercle ; si on mène la parallèle CE à DB et la corde EA, coupant DB en F et qu'on abaisse de F

arcus EDF quam ECF est semicirculus, et arcus ED aequalis arcui EA cum arcu AD, erit arcus CF cum duobus arcubus EA, AD aequalis semicirculo. Et arcus EA aequalis arcui BF ; ergo arcus CB cum arcu AD aequalis est semicirculo. Et remanent duo arcus EC, EA, nempe arcus AC, cum arcu DB aequales illi. Et hoc est quod uoluimus.

ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΑΔ, ΓΒ δυσὶ ταῖς ἀπεναντίον ταῖς ΑΓ, ΒΔ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Τετμάσθω γὰρ δίχα ἁ ΓΔ κατὰ τὸ Η σαμεῖον καὶ διὰ τοῦ Η διάχθω διάμετρος τοῦ κύκλου ἁ ΕΖ παρὰ τὰν ΑΒ.

Ἐπεὶ οὖν περιφέρεια ἁ ΕΓ περιφερείαις ταῖς ΕΑ, ΑΔ ἴσα ἐστίν, ἐσσοῦνται ἄρα περιφέρειαι αἱ ΓΖ, ΕΑ, ΑΔ ἁμικυκλίῳ ἴσαι· ἔστι δὲ περιφέρεια ἁ ΕΑ περιφερείᾳ τᾳ̂ ΒΖ ἴσα· συναμφότερος ἄρα περιφέρεια ἁ ΓΒ, ΑΔ ἁμικυκλίῳ ἐστὶν ἴσα· λοιπὴ ἄρα περιφέρεια ἁ ΑΓ, ΔΒ ἁμικυκλίῳ ἐστὶν ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

10.

Si fuerit circulus ABC et DA tangens illum et DB secans illum et DC etiam tangens, et educta fuerit CE parallela ipsi DB, et iuncta fuerit EA secans DB in F, et educta fuerit ex F perpendicula-

ι'.

Εἴ κα ᾗ κύκλος καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΓ ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ κατὰ τὰ Α, Γ σαμεῖα, τέμνουσα δὲ εὐθεῖα ἁ ΔΒ, ἀχθῇ δὲ ἁ ΕΓ παρὰ τὰν ΒΔ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἁ ΕΑ τέμνουσα τὰν ΔΒ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ποτ'

la perpendiculaire FG sur CE, cette perpendiculaire divisera CE en deux parties égales au point G.

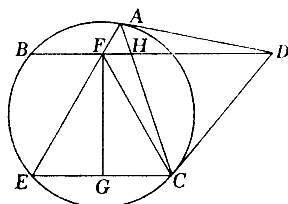


Fig. 144

Menons AC ; comme DA est une tangente et AC une sécante du cercle, l'angle DAC sera égal à l'angle inscrit dans le segment alterne[1] (sc. complémentaire) du segment AC, c'est-à-dire à l'angle AEC. Or l'angle AEC est égal à l'angle AFD, parce que CE et BD sont parallèles[2] ; il s'ensuit que les angles DAC et AFD sont égaux. De plus, dans les deux triangles DAF et AHD les deux angles AFD et HAD sont égaux, et l'angle de sommet D leur est commun, d'où il suit que le rectangle de côtés FD et DH est équivalent[3] au carré sur DA et, partant, au carré sur DC. Et comme le rapport de FD à DC est égal[4] au rapport de CD à DH, et que l'angle de sommet D leur est commun, les

1. Cf. Eucl. III, 32.
2. Cf. Eucl. I, 29.
3. Parce que, les deux triangles ADH et ADF étant semblables, $\frac{FD}{DA} = \frac{DA}{DH}$, d'où $\overline{DA}^2 = FD \cdot DH$.
4. Cf. Eucl. VI, 17.

ris FG super CE, utique bifariam secabit illam in G.

ὀρθὰς τᾷ ΕΓ ἀχθῇ ἁ ΖΗ, ἁ ἀγμένα τὰν ΕΓ δίχα τέμνει.

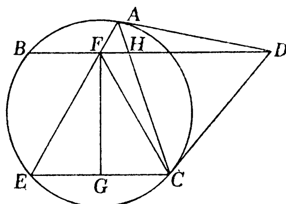


Fig. 144

Iungamus AC. Et quia DA est tangens et AC secans circulum, erit angulus DAC aequalis angulo cadenti in alterno segmento AC, nempe angulo AEC. Et est aequalis angulo AFD, eo quod CE, BD sunt parallelae; ergo anguli DAC, AFD sunt aequales. Et in duobus triangulis DAF, AHD sunt duo anguli AFD, HAD aequales, et angulus D communis; propterea erit rectangulum FD in DH aequale quadrato DA, immo quadrato DC. Et quia proportio FD ad DC est eadem proportioni CD ad DH, et angulus D

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΑΓ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἁ ΔΑ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου ἐστίν, ἁ δὲ ΑΓ τέμνουσα αὐτόν, γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΓ τᾷ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμάματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΑΕΓ, τουτέστι τᾷ ὑπὸ ΑΖΔ, ἐστὶν ἴσα. Ἔστι γὰρ ἁ ΓΕ παρὰ τὰν ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΔΑΖ, ΑΘΔ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΖΔ, ΘΑΔ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνία δὲ ἁ πρὸς τῷ Δ κοινά, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΔ, ΔΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΑ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνῳ, ἐστὶν ἴσον· ἐπεὶ οὖν ὃν λόγον ἔχει ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, τοῦτον ἔχει καὶ ἁ ΔΓ ποτὶ τὰν ΔΘ, γωνία

triangles DFC et DCH sont semblables[1] et l'angle DFC est égal à l'angle DCH, lui-même égal à l'angle DAH. Or l'angle DAH est égal à l'angle AFD ; il s'ensuit que les deux angles AFD et CFD sont égaux. Mais l'angle DFC est égal[2] à l'angle FCE, et l'angle DFA est égal à l'angle AEC ; par conséquent, dans le triangle FEC les deux angles de sommets C et E sont égaux, les deux angles de sommet G sont droits, et le côté GF est commun (sc. aux triangles FEG et FCG), d'où il suit que CG est égal[3] à GE. La corde CE est donc divisée en deux parties égales au point G, ce que nous avons voulu démontrer.

11.

Si dans un cercle deux cordes AB et CD se coupent à angle droit en un point E différent du centre, la somme des carrés sur AE, BE, EC et ED est équivalente au carré sur le diamètre.

Menons le diamètre AF et les droites AC, AD, CF et DB. Comme l'angle AED est droit, il sera égal[4] à l'angle

1. Cf. Eucl. VI, ,
2. Cf. Eucl. I, 29.
3. Cf. Eucl. I, 26.
4. Cf. Eucl. III, 31.

communis, erunt triangula DFC, DCA similia, et angulus DFC aequalis DCH, qui aequalis est angulo DAH. Et hic est aequalis angulo AFD ; ergo duo anguli AFD, CFD sunt aequales. Et DFC aequalis angulo FCE ; et erat DFA aequalis angulo AEC ; ergo in triangulo FEC sunt duo anguli C, E aequales et duo anguli G recti et latus GF commune ; propterea erit CG aequalis ipsi GE. Ergo CE bifariam secatur in G. Et hoc est quod uoluimus.

δὲ ἁ ποτὶ τὸ Δ σαμεῖον κοινά ἐστιν, τρίγωνα ἄρα τὰ ΔΖΓ, ΔΓΘ ἐστὶν ὅμοια καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΖΓ, ΔΓΘ, ΔΑΘ, ΑΖΔ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί · ἔστι δὲ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΖΓ τᾷ ὑπὸ ΖΓΕ ἴσα · ἦν δὲ καὶ ἁ ὑπὸ ΔΖΑ τᾷ ὑπὸ ΑΕΓ ἴσα · ἐν δυσὶ τριγώνοις ἄρα τοῖς ΕΗΖ, ΓΗΖ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΕΖ, ΗΓΖ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντὶ καὶ αἱ ποτὶ τῷ Η σαμείῳ γωνίαι ὀρθαί · ἔστι δὲ πλευρὰ ἁ ΗΖ κοινά · ἔστιν ἄρα ἁ ΕΗ τᾷ ΗΓ ἴσα · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

11.

Si mutuo se secuerint in circulo duae lineae AB, CD ad angulos rectos in E, quod non sit in centro, utique omnia quadrata AE, BE, EC, ED aequalia sunt quadrato diametri.

Educamus diametrum AF, et iungamus lineas

ια′.

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωντι ἀλλάλας ποτ’ ὀρθὰς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν εὐθειῶν τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐντί.

Ἔστω γὰρ κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τετμάσθων ποτ’ ὀρθὰς κατὰ

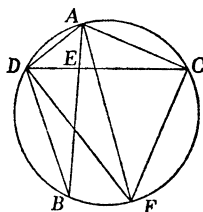


Fig. 145

ACF. Or l'angle ADC est égal à l'angle AFC comme s'appuyant[1] sur le même arc AC ; il s'ensuit que dans les deux triangles ADE et AFC les deux angles CAF et DAE sont égaux ; de même les deux arcs CF et DB seront égaux[2], et par conséquent les cordes qui les soustendent sont aussi égales[3]. Or la somme des deux carrés sur DE et sur EB est équivalente au carré sur BD, c'est-à-dire au carré sur CF, la somme des deux carrés sur AE et sur EC est équivalente au carré sur CA,

1. Cf. Eucl. III, 27.
2. Cf. Eucl. III, 26.
3. Cf. Eucl. III, 29.

Fig. 145

AC, AD, CF, DB. Et quia angulus AED est rectus, erit aequalis angulo ACF. Et angulus ADC aequalis AFC, eo quod sunt super arcum AC ; et remanent in duobus triangulis ADE, AFC duo anguli CAF, DAE aequales ; erunt pariter duo arcus CF, DB aequales, immo et duae chordeae eorum aequales. Et duo quadrata DE, EB aequantur quadrato BD, nempe CF, et duo quadrata AE, EC aequantur quadrato CA,

τὸ Ε σαμεῖον· φαμὶ δή, τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐστίν.

Ἄχθω γὰρ διάμετρος τοῦ κύκλου ἁ ΑΖ καὶ ἐπεζεύχθων αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΓΖ, ΔΒ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΑΔΕ, ΑΖΓ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΕΔ, ΑΔΕ, καὶ ΑΓΖ, ΑΖΓ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντὶ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, λοιπαὶ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΖ, ΔΑΕ ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἴσαι· περιφέρειαι ἄρα αἱ ΓΖ, ΔΒ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, καὶ αἱ ταύτας ὑποτείνουσαι εὐθεῖαι αἱ ΓΖ, ΔΒ· ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΒ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΖ, ἴσον, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΑ, καὶ τὰ ἀπὸ

et la somme des deux carrés sur CF et sur CA est équivalente au carré sur FA, c'est-à-dire sur le diamètre. Par conséquent, la somme des carrés sur AE, sur EB, sur CE et sur ED est équivalente au carré sur le diamètre, ce que nous avons voulu démontrer.

12.

Soit un demi-cercle de diamètre AB et deux droites issues d'un point C et tangentes au demi-cercle aux

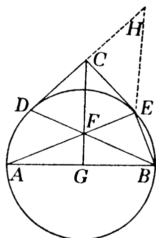


Fig. 146

deux points D et E ; si on mène EA et DB, qui se coupent en F, et CF et qu'on prolonge CF jusqu'au point G, CG sera perpendiculaire à AB.

et duo quadrata CF, CA aequantur quadrato FA, nempe diametri ; igitur quadrata AE, EB, CE, ED omnia sunt aequalia quadrato diametri. Et hoc est quod uoluimus.

τῶν ΓΖ, ΓΑ τῷ ἀπὸ τᾶς ΖΑ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου, ἴσα· ἐσσοῦνται ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

12.

Si fuerit semicirculus super diametrum AB, et eductae fuerint ex C duae lineae tangentes illum in duobus punctis D, E, et iunctae fuerint EA, DB se mutuo secantes in F, et iuncta fuerit CF et producatur ad G, erit CG perpendicularis ad AB.

ιβ'.

Εἴ κα ἐκ σαμείου ἐκτὸς ἁμικυκλίου δύο εὐθεῖαι ἀχθέωντι ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ, ἀχθέωντι δὲ ἐκ τῶν σαμείων ἁφᾶς δύο εὐθεῖαι ποτὶ τὰ ἀπεναντίον πέρατα τᾶς διαμέτρου τέμνουσαι ἀλλάλας, ἁ ἐκ τοῦ ἐκτὸς σαμείου ποτὶ τὸ σαμεῖον τομᾶς τῶν δύο εὐθειῶν ἀχθεῖσα καὶ ἐκβληθεῖσα ποτὶ τὰν διάμετρον ἐσσεῖται ταύτᾳ ποτ' ὀρθάς.

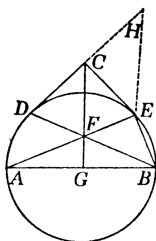


Fig. 146

Menons DA et EB. L'angle BDA étant droit[1], les deux autres angles DAB et DBA du triangle DAB ont pour somme un angle droit, et comme l'angle AEB est droit, cette somme lui est égale. Ajoutons de part et d'autre l'angle FBE ; la somme des deux angles DAB et ABE est égale à la somme des angles FBE et FEB, c'est-à-dire à l'angle externe[2] DFE du triangle FBE. D'autre part, puisque CD est une tangente au cercle et que DB en est une sécante, l'angle CDB est égal à l'angle DAB, et, de même, l'angle CEF est égal[3] à l'angle EBA, d'où il suit que la somme des deux angles CEF et CDF est égale à l'angle DFE. Or il ressort de notre traité *Des figures quadrilatères*[4] que si, entre deux droites égales se rencontrant en

1. Cf. Eucl. III, 31.
2. Cf. Eucl. I, 32.
3. Cf. Eucl. III, 32.
4. Seul endroit où un tel traité soit attribué à Archimède.

Iungamus DA, EB. Et quia angulus BDA est rectus, erunt duo anguli DAB, DBA reliqui in triangulo DAB aequales uni recto. Et angulus AEB rectus ; igitur sunt aequales ei. Et ponamus angulum FBE communem ; ambo anguli DAB, ABE sunt aequales FBE, FEB, immo angulo DFE externo in FBE. Et quia CD est tangens circulum et DB secans illum, angulus CDB aequatur angulo DAB, et pariter angulus CEF aequatur angulo EBA ; ergo duo anguli CEF, CDF simul aequales sunt angulo DFE. Et iam quidem planum fit ex nostro tractatu de figuris quadrilateris quod, si educantur inter duas lineas aequales sibi occurrentes in aliquo

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ AB, σαμεῖον δέ τι ἐκτὸς αὐτοῦ τὸ Γ, καὶ ἐκ τοῦ Γ ἄχθων δύο εὐθεῖαι αἱ ΓΔ, ΓΕ ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ κατὰ τὰ Δ, Ε σαμεῖα, ἐπεζεύχθων δὲ ἐκ τῶν σαμείων ἁφᾶς ποτὶ τὰ ἀπεναντίον πέρατα τᾶς διαμέτρου τὰ Α, Β εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΔΒ τέμνουσαι ἀλλάλας κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀχθεῖσα ἁ ΓΖ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η σαμεῖον· φαμὶ δή, εὐθεῖα ἁ ΓΗ διαμέτρῳ τᾷ AB ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς.

Ἐπεζεύχθων γὰρ αἱ ΑΔ, ΕΒ. Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΑΒ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΒ ὀρθά ἐστιν, λοιπαὶ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΒ, ΔΒΑ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΕΒ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα· κοινὰ ποτικείσθω ἁ ὑπὸ ΖΒΕ· συναμφότερος ἄρα ἁ ὑπὸ ΔΑΒ, ΑΒΕ συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ ΖΒΕ, ΖΕΒ, τουτέστιν ἐξωτερικᾷ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΖΕ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου ἐστίν, διᾶκται δὲ ἀπὸ τοῦ σαμείου ἁφᾶς τοῦ Δ ἁ

un point, comme les deux droites CD et CE, on mène deux droites se coupant, comme les deux droites DF et EF, et si l'angle compris entre elles, comme l'angle F, est égal à la somme des deux angles qui sont produits par l'intersection des deux droites, comme la somme des deux angles E et D, le segment de droite compris entre le point de concours et le point d'intersection, comme le segment de droite CF, est égal à chacune des droites concourantes[1], comme CD ou CE ; CF sera donc égal à CD, d'où il suit que l'angle CFD est égal à l'angle CDF, c'est-à-dire à l'angle DAG. Mais la somme des angles CFD et DFG est égale à un angle bidroit ; la somme des angles DAG et DFG est donc

1. Dans son édition (cf. l'Introduction), p. 405, Borelli démontre cette proposition de la manière que voici : puisque l'angle H est égal à l'angle CEH et que l'angle DFE est égal à la somme des angles CDF et CEF, la somme des angles DFE et H est égale à la somme des angles CDF et FEH et égale à un angle bidroit, d'où il suit que le quadrilatère DFEH est inscriptible dans un cercle (cf. Eucl. III, 22). Le centre de ce cercle sera le point C, du moment que CH = DC = CE ; il s'ensuit que CF = CD.

Avant Borelli, le commentateur arabe Almochtasso-Abul-Hassan avait proposé une démonstration apagogique de ce même théorème.

puncto, uti sunt duae lineae CD, CE, duae lineae se mutuo secantes, uti sunt duae lineae DF, EF, et fuerit angulus ab illis contentus, ut est angulus F, aequalis duobus angulis, qui occurrunt duabus lineis se inuicem secantibus, uti sunt duo anguli E, D, simul, erit linea egrediens a puncto concursus ad punctum sectionis, uti est linea CF, aequalis cuilibet linearum sibi occurrentium, ut CD uel CE ; propterea erit CF aequalis ipsi CD ; ergo angulus CFD est aequalis angulo CDF, nempe angulo DAG. Sed angulus CFD cum angulo DFG est aequalis duobus rectis ; ergo angulus DAG cum angulo DFG aequa-

ΔB τέμνουσα τὸν κύκλον, ἐσσεῖται γωνία ἁ ὑπὸ ΓΔB γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔAB ἴσα· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓEZ τᾷ ὑπὸ EBA ἐστὶν ἴσα· καὶ συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΓEZ, ΓΔZ τᾷ ὑπὸ ΔZE ἐστὶν ἴσα· καὶ δέδεικται παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ τετραπλεύρων ὅτι εἴ κα μεταξὺ δύο ἰσᾶν εὐθειᾶν τεμνομενᾶν, οἷον τᾶν ΓΔ, ΓE, δύο εὐθεῖαι ἀχθέωντι τεμνόμεναι, οἷον αἱ ΔZ, EZ, γωνία δὲ ἁ ὑπὸ τούτων περιεχομένα, ὡς ἁ ποτὶ τῷ Z, συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ τῶν δύο τεμνομενᾶν εὐθειᾶν περιεχομένᾳ, ὡς αἱ ποτὶ τοῖς E, Δ σαμείοις, ἴσα ἐστίν, ἁ ἐπιζευγνυμένα ἐκ τοῦ σαμείου καθ' ὃ αἱ δύο εὐθεῖαι συμβάλλοντι ἐπὶ τὸ σαμεῖον καθ' ὃ αὗται τέμνοντι ἀλλάλας, ὡς ἁ ΓZ εὐθεῖα, ἑκατέρᾳ τᾶν τεμνομενᾶν εὐθειᾶν, ὡς αἱ ΓΔ, ΓE, ἐστὶν ἴσα· ἁ ΓZ εὐθεῖα ἄρα τᾷ ΓΔ ἐστὶν ἴσα καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓZΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΓΔZ, τουτέστι τᾷ ὑπὸ ΔAH· γωνίαι δὲ αἱ ὑπὸ

aussi égale à un angle bidroit, d'où il suit que dans le quadrilatère ADFG les deux angles ADF et AGF ont une somme égale à un angle bidroit. Mais l'angle ADB est droit ; par conséquent l'angle AGC est droit, et CG est perpendiculaire à AB, et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

13.

Si deux droites AB et CD se coupent à l'intérieur d'un cercle, AB étant un diamètre et CD une corde quelconque de ce cercle, et si on abaisse des deux points A et B les deux perpendiculaires AE et BF sur CD, ces perpendiculaires découperont sur la corde CD deux segments CF et DE égaux entre eux[1].

Menons EB, abaissons du centre I du cercle la perpendiculaire IG sur CD et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre H avec EB. Comme IG est la perpendi-

1. Cf. Pappus VII, 132.

lis est duobus rectis ; et remanent in quadrilatero ADFG duo anguli ADF, AGF aequales duobus rectis. Set angulus ADB rectus est ; ergo angulus AGC est rectus et CG perpendicularis ad AB. Et hoc est quod uoluimus.

ΓΖΔ, ΔΖΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί· συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΗ, ΔΖΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα ἐστίν· λοιπαὶ ἄρα γωνίαι τετραπλεύρου τοῦ ΑΔΖΗ αἱ ὑπὸ ΑΔΖ, ΑΗΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΒ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΑΗΓ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα ἐστίν· ἔστιν ἄρα εὐθεῖα ἁ ΔΗ διαμέτρῳ τᾷ ΑΒ ποτ' ὀρθάς· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

13.

Si mutuo se secent duae lineae AB, CD in circulo, et fuerit AB diameter illius, at non CD, et educantur ex duobus punctis A, B duae perpendiculares ad CD, quae sint AE, BF, utique abscindent ex illa CF, DE aequales.

Iungamus EB et educamus ex I, quod est centrum, perpendicularem IG super CD et producamus eam ad H in EB. Et quia IG est

ιγ'.

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλάλας μὴ ποτ' ὀρθὰς ὦσιν, ἁ μὲν διάμετρος ἁ δὲ οὔ, ἀχθέωντι δὲ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου εὐθεῖαι ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἄλλᾳ εὐθείᾳ, αἱ ἀπολαφθεῖσαι ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλάλας μὴ ποτ' ὀρθὰς αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἇν ἁ ΑΒ διάμετρος τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου

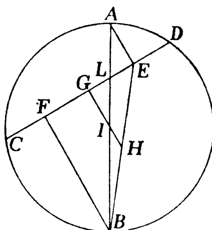


Fig. 147

culaire abaissée du centre sur CD, IG divisera CD en deux parties égales[1] au point G ; d'autre part, IG et AE, étant deux perpendiculaires à CD, seront parallèles[2], et comme BI est égal à IA, BH sera égal[3] à HE ; et à cause de leur égalité, et parce que BF est parallèle à HG, FG sera égal à GE ; cette dernière égalité, jointe à l'égalité de GC et de GD, entraîne l'égalité de FC et de ED que nous avons voulu démontrer.

1. Cf. Eucl. III, 3.
2. Cf. Eucl. I, 28.
3. Cf. Eucl. VI, 2.

Fig. 147

perpendicularis ex centro ad CD, illam bifariam diuidet in G ; et quia IG, AE sunt duae perpendiculares super illam, erunt parallelae. Et quia BI aequalis est IA, erit BH aequalis ipsi HE ; et propter earum aequalitatem, et quia BF est parallela ipsi HG, erit FG aequalis ipsi GE, et ex GC, GD aequalibus remanent FC, ED aequales. Et hoc est quod uoluimus.

τῶν Α, Β ἄχθωσαν τᾷ ΓΔ ποτ᾽ ὀρθὰς εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ· φαμὶ δή, αἱ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου ἀπολαφθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΓΖ, ΔΕ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΕΒ καὶ ἀπὸ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ Ι τᾷ ΓΔ ἄχθω ποτ᾽ ὀρθὰς εὐθεῖα ἁ ΙΗ καὶ ἐκβληθεῖσα συμβαλλέτω τᾷ ΕΒ κατὰ τὸ Θ σαμεῖον.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἁ ΙΗ παρὰ τὰν ΑΕ ἐστίν, ἁ δὲ ΒΙ τᾷ ΙΑ ἴσα, εὐθεῖα ἄρα ἁ ΒΘ τᾷ ΘΕ ἐστὶν ἴσα. Πάλιν, ἐπεὶ ἁ ΒΖ παρὰ τὰν ΘΗ ᾖ, ἐστίν εὐθεῖα ἄρα ἁ ΖΗ εὐθείᾳ τᾷ ΗΕ ἐστὶν ἴσα· ἔστι δὲ καὶ ἁ ΗΓ τᾷ ΗΔ ἴσα· κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ΖΗ, τουτέστιν ἁ ΗΕ· λοιπὰ ἄρα ἁ ΖΓ λοιπᾷ τᾷ ΕΔ ἐστὶν ἴσα· φανερὸν οὖν ὃ ἔδει δεῖξαι.

14.

Soit un demi-cercle de diamètre AB et deux segments de droite égaux AC et BD pris sur le diamètre AB ; si on décrit sur AC, CD et DB comme diamètres des demi-cercles, le centre commun des deux demi-cerlces sur AB et sur CD étant E, et qu'on prolonge la perpendiculaire EF sur AB jusqu'au point G, le cercle de diamètre FG est équivalent à l'aire comprise entre le grand demi-cercle, les deux demi-cercles qui lui sont intérieurs et le demi-cercle du milieu qui lui est extérieur. Cette aire est la figure appelée Salinon[1] par Archimède.

Puisque DC est divisé en deux parties égales par le point E et que CA est ajouté à DC, la somme des carrés sur DA et sur CA est égale[2] à la double somme des carrés sur DE et EA. Mais FG est égal à DA, d'où il suit que la somme des carrés sur FG et sur AC est

1. Différentes explications ont été proposées pour le sens et l'origine de ce mot. Barrow le fait dériver de σελίνιον, lunule, M. Cantor de σάλος, agitation d'une vague, Th. Heath du mot latin salinum, salière, et Heiberg de σέλινον, feuille d'ache.

2. Cf. Eucl. II, 10.

14.

Si fuerit AB semicirculus, et ex eius diametro AB dissectae sint AC, BD aequales, et efficiantur super lineas AC, CD, DB semicirculi, et sit centrum duorum semicirculorum AB, CD punctum E, et sit EF perpendicularis super AB et producatur ad G, utique circulus, cuius diameter est FG, aequalis est superficiei contentae a semicirculo maiori et a duobus semicirculis, qui sunt intra illum, et a semicirculo medio, qui est extra illum. Et est figura, quam uocat Archimedes Salinon.

Quia DC bifariam secatur in E, et addita est illi CA, erunt duo quadrata DA, CA dupla duorum quadratorum DE, EA. Sed FG aequalis est ipsi DA ; ergo duo quadrata FG, AC dupla

ιδ'.

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἴσα τμάματα λαφθέωντι καὶ ἀπὸ τούτων ἁμικύκλια ἐντὸς γραφέωντι, γραφῇ δὲ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμάματος τᾶς διαμέτρου ἁμικύκλιον ἐκτός, ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος συναμφότερος ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἁμικυκλίου καὶ ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐκτός, χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἁμικυκλίων, ὅπερ σελήνιον καλείσθω, ἴσος ἐστίν.

Ἔστω ἁμικύκλιον, οὗ διάμετρος ἁ AB, καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου τῶν A, B δύο τμάματα ἴσα ἀλλάλοις λελάφθω τὰ ΑΓ, ΒΔ, γεγράφθω δὲ ἀπὸ τῶν τμαμάτων δύο ἁμικύκλια ἐντός, καὶ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμάματος τοῦ ΓΔ γεγράφθω ἁμικύκλιον ἐκτός, διὰ κέντρου δὲ τοῦ ἁμικυκλίου τοῦ E διαμέτρῳ τᾷ AB ἄχθω ποτ' ὀρθὰς εὐθεῖα ἁ EZ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ H σαμεῖον· φαμὶ δή, ὁ κύκλος,

égale à la double somme des carrés sur DE et sur EA. Comme, d'autre part, AB est double de AE et CD double de ED, la somme des carrés sur AB et sur DC sera

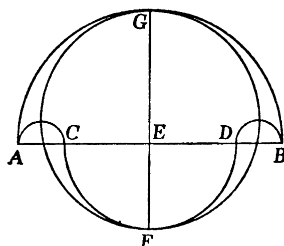


Fig. 148

quadruple de la somme des carrés sur DE et sur EA et, partant, égale à la double somme des carrés sur GF et sur AC. De même, la somme des deux cercles de diamètres AB et DC est égale à la double somme des cercles de diamètres GF et AC, et la demi-somme des cercles de diamètres AB et CD est égale à la somme des cercles de diamètres GF et AC. Mais le cercle de

sunt duorum quadratorum DE, EA. Et quia AB dupla est AE, et CD dupla quoque ED, erunt duo quadrata AB, DC

οὗ διάμετρος ἁ ZH, χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἁμικυκλίων, ὅπερ σελήνιον καλείσθω, ἴσος ἐστίν.

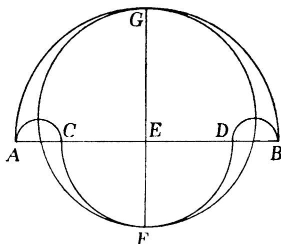


Fig. 148

quadrupla duorum quadratorum DE, EA, immo dupla duorum quadratorum GF, AC. Similiter etiam duo circuli, quorum diametri sunt AB, DC, dupli sunt eorum, quorum diametri sunt GF, AC, et dimidii eorum, quorum diametri sunt AB, CD, aequales duobus

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὰ ἁ ΔΓ δίχα τέτμαται κατὰ τὸ E σαμεῖον, ποτίκειται δὲ αὐτᾷ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἁ ΓΑ, τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΑ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ποτικειμένας τᾶς ΓΑ τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλασιόνά ἐντι τοῦ τε ἀπὸ τᾶς ἁμισείας τᾶς ΔΕ καὶ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ τετραγώνου. Ἔστι δὲ ἁ ZH τᾷ ΔΑ ἴσα· ἔστιν ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ZH, ΓΑ διπλασίονα τοῦ τε ἀπὸ τᾶς ΔΕ καὶ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ. Καὶ ἐπεὶ ἁ ΑΒ τᾶς ΑΕ διπλασίων ἐστὶ καὶ ἁ ΓΔ

diamètre AC est égal à la somme des deux demi-cercles sur AC et sur BD ; si nous retranchons donc de part et d'autre des cercles indiqués les deux demi-cercles sur AC et sur BC qui sont en commun, il reste la figure comprise entre les quatre demi-cercles de diamètres AB, CD, DB et AC (appelée Salinon par Archimède), équivalente au cercle de diamètre FG. Et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

15.

Soit un demi-cercle de diamètre AB, AC une corde égale au côté du pentagone (sc. régulier inscrit dans le cercle entier), AD la moitié de l'arc AC ; menons CD, prolongeons cette corde jusqu'à E, menons DB coupant

circulis, quorum diametri sunt GF, AC. Sed circulus, cuius diameter AC, est aequalis duobus semicirculis AC, BD ; ergo, si auferamus ex illis duos semicirculos AC, BD, qui sunt communes, remanet figura contenta a quattuor semicirculis AB, CD, DB, AC, (quae ea est, quam uocat Archimedes Salinon) aequalis circulo, cuius diameter est FG. Et hoc est quod uoluimus.

τᾶς ΔΕ, ἐσσεῖται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΑ τετραπλασίονα, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΗ, ΓΑ διπλασίονα· κύκλοι ἄρα, ὧν διάμετροι αἱ ΑΒ, ΔΓ εὐθεῖαι, κύκλων, ὧν διάμετροι αἱ ΖΗ, ΓΑ, διπλασίονές ἐντι· ἁμικύκλια ἄρα, ὧν διάμετροι αἱ ΑΒ, ΔΓ εὐθεῖαι, κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ ΖΗ, ΓΑ, ἴσα ἐστίν· κοινὸν ἀφαιρήσθω κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ ΑΓ, τουτέστι δύο ἁμικύκλια, ὧν διάμετροι αἱ ΑΓ, ΔΒ· λοιπὸν ἄρα χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἁμικυκλίων περιεχόμενον, ὅπερ σελήνιον καλεῖται, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ΖΗ, ἴσον ἐστίν· δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

15.

Si fuerit AB semicirculus et AC chorda pentagoni, et semissis arcus AC sit AD, iungatur CD et producatur, ut cadat super E, et

ιε'.

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒ καὶ ἁ ΑΓ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου, τετμάσθω δὲ περιφέρεια ἁ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἁ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ

CA en F, et abaissons de F la perpendiculaire FG sur AB ; le segment de droite EG sera alors égal au rayon du cercle[1].

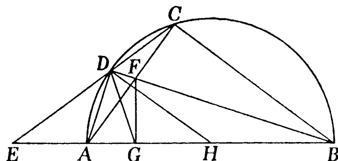


Fig. 149

Soit donc H le centre (sc. du demi-cercle) ; menons CB, HD, DG et AD. Comme l'angle ABC, ayant pour base le côté du pentagone, est égal aux deux cinquièmes d'un angle droit[2], chacun des deux angles CBD et DBA est égal à la cinquième partie d'un angle droit. Or l'angle DHA est double[3] de l'angle DBH, d'où il suit que l'angle DHA est égal aux deux cinquièmes d'un

1. Cf. Pappus V, 77.
2. Cf. Eucl. III, 20.
3. Cf. Eucl. III, 20.

iungatur DB, quae secet CA in F, et ducatur ex F perpendicularis FG super AB, erit linea EG aequalis semidiametro circuli.

ἀπὸ τοῦ Δ σαμείου διάχθω ἁ ΔΒ τέμνουσα πλευρὰν τὰν ΑΓ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἄχθω τᾷ ΑΒ ποτ' ὀρθὰς ἁ ΖΗ· φαμὶ δή, εὐθεῖα ἁ ΕΗ τᾷ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐστίν.

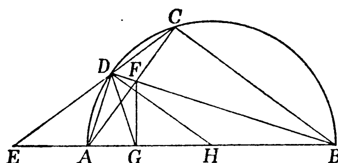


Fig. 149

Iungamus itaque lineam CB, et sit centrum H, et iungamus HD, DG et AD. Et quia angulus ABC, cuius basis est latus pentagoni, est duae quintae partes recti, quilibet duorum angulorum CBD, DBA est quinta pars recti. Et angulus DHA duplus est anguli DBH ; ergo angulus DHA est duae

'Επεζεύχθω γὰρ ἁ ΓΒ, καὶ ἔστω κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σαμεῖον, καὶ ἄχθωσαν αἱ ΘΔ, ΔΗ, ΑΔ εὐθεῖαι. 'Επεὶ οὖν γωνία ἁ ὑπὸ ΑΒΓ δύο πέμπτα ὀρθᾶς ἐστιν, γωνία ἁ ὑπὸ ΓΒΔ, τουτέστι ἁ ὑπὸ ΔΒΑ, ἓν πεμπταμόριον ὀρθᾶς ἐστιν· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΔΘΑ δύο πέμπτα ὀρθᾶς ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΓΒΖ, ΗΒΖ δύο γωνίαι αἱ ποτὶ τῷ Β ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, ὀρθαὶ δὲ αἱ ποτὶ τὰ Η, Γ σαμεῖα, κοινὰ δὲ πλευρὰ ἁ ΒΖ, ἐσσεῖται ἄρα καὶ

angle droit. Puisque, de plus, dans les deux triangles CBF et GBF, les deux angles de sommet B sont égaux, que les angles de sommets G et C sont droits, et que le côté FB leur est commun, BC sera égal[1] à BG ; et comme dans les deux triangles CBD et GBD les deux côtés CB et BG sont égaux, les deux angles de sommet B égaux et le côté BD en commun, les deux angles BCD et BGD seront égaux[2]. En outre, chacun d'eux est égal aux six cinquièmes[3] d'un angle droit, et égal à l'angle externe DAE du quadrilatère BADC, qui est inscriptible dans un cercle[4] ; il s'ensuit donc que l'angle DAB est égal à l'angle DGA, et DA sera égal à DG. Comme l'angle DHG est égal aux deux cinquièmes, et l'angle DGH égal aux six cinquièmes d'un angle droit, l'angle HDG est égal aux deux cinquièmes d'un angle droit, et DG sera égal à GH. L'angle ADE étant angle externe

1. Cf. Eucl. I, 26.
2. Cf. Eucl. I, 4.
3. Parce, d'après Eucl. III, 20, l'angle DCA est égal à la moitié de l'angle DHA, et que l'angle FCB est droit.
4. Parce que chacune des deux sommes, angle BCH+angle DAB, et angle DAE+angle DAB, est égale à un angle bidroit ; cf. Eucl. III, 22.

quintae partes recti. Et quia in duobus triangulis CBF, GBF duo anguli B sunt aequales et G, C recti et latus FB commune, erit BC aequale ipsi BG. Et quia in duobus triangulis CBD, GBD duo latera CB, BG sunt aequalia et similiter duo anguli ad B, et latus BD commune, erunt duo anguli BCD, BGD aequales. Et quilibet eorum est sex quintae partes recti, et est aequalis angulo DAE externo quadrilateri BADC, quod est in circulo; ergo remanet angulus DAB aequalis angulo DGA, et erit DA aequalis ipsi DG. Et quia angulus DHG est duae quintae partes recti et angulus DGH sex quintae partes recti, remanet angulus HDG duae quintae partes recti, et erit DG aequalis GH. Et quia ADE externus quadrila-

βάσις ἁ ΒΓ βάσει τᾷ ΒΗ ἴσα. Πάλιν ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΓΒΔ, ΗΒΔ δύο πλευραὶ αἱ ΓΒ, ΒΗ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνίαι δὲ αἱ ποτὶ τῷ Β ἴσαι, κοινὰ δὲ πλευρὰ ἁ ΒΔ, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΒΓΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΒΗΔ, τουτέστιν ἐπιπέμπτῳ ὀρθᾶς, ἴσα· ἔστι δὲ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΒΗΔ γωνιῶν γωνίᾳ τᾷ ἐκτὸς τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τετραπλεύρου τοῦ ΒΑΔΓ, τουτέστι τᾷ ΔΑΕ, ἴσα· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΗΑ ἔστιν ἴσα, καὶ πλευρὰ ἁ ΔΑ τᾷ ΔΗ. Καὶ ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΘΗ $\overline{\beta}\epsilon'$ ὀρθᾶς ἐστι καὶ ἁ ὑπὸ ΔΗΘ ἐπίπεμπτος ὀρθᾶς, γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΘΔΗ $\overline{\beta}\epsilon'$ ὀρθᾶς ἐστιν· πλευρὰ ἄρα ἁ ΔΗ πλευρᾷ τᾷ ΗΘ ἐστὶν ἴσα. Πάλιν, ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΕ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τετραπλεύρου τοῦ ΑΔΓΒ ἐκτός ἐστιν, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσα· ἔστι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΒΓ $\overline{\beta}\gamma'$ ὀρθᾶς· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΗΔΘ

du quadrilatère ADCB inscriptible dans un cercle, il est égal à l'angle CBA, égal aux deux cinquièmes d'un angle droit et égal à l'angle GDH. Du moment, d'autre part, que dans les deux triangles EDA et HDG les deux angles EDA et HDG, ainsi que les deux angles DGH et DAE, sont égaux, et que les deux côtés DA et DG sont égaux, EA sera égal à HG ; ajoutons de part et d'autre AG ; EG sera alors égal[1] à AH, ce que nous avons voulu démontrer.

Il est évident, d'après ce qui précède, que DE est égal au rayon du cercle ; comme l'angle de sommet A (sc. l'angle DAE) est égal à l'angle DGH, DH sera égal[2] à DE. Je dis, de plus, que EC est divisé en moyenne et extrême raison[3] par le point D, et que le plus grand segment partiel est DE, et cela parce que ED est la corde de l'hexagone[4], et DC la corde du décagone ; cette propriété a déjà été démontré dans le livre des *Éléments*[5], et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

1. Cf. Eucl. I, 26.
2. Parce que DA = DG et EA = GH.
3. Cf. Eucl. VI, déf. 3.
4. Cf. Eucl. IV, 15.
5. Cf. Eucl. XIII, 9.

teri ADCB, quod est in circulo, est aequalis angulo CBA, et est duae quintae partes recti et aequalis angulo GDH. Et quia in duobus triangulis EDA, HDG sunt duo anguli EDA, HDG aequales et pariter duo anguli DGH, DAE et duo latera DA, DG, erit EA aequale HG. Et ponamus AG commune ; erit EG aequale AH. Et hoc est quod uoluimus.

Et hinc patet quod linea DE aequalis sit semidiametro circuli ; quia angulus A aequalis est angulo DGH, ideo erit linea DH aequalis lineae DE.

Et dico quod EC diuiditur media et extrema proportione in D, et maius segmentum est DE ; et hoc, quia ED est chorda hexagoni et DC decagoni, et hoc iam demonstratum est in libro Elementorum. Et hoc est quod uoluimus.

ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΕΔΑ, ΘΔΗ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΔΑ, ΔΑΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΘΔΗ, ΔΗΘ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ἴσαι ἐντί, βάσις δὲ ἁ ΔΑ βάσει τᾷ ΔΗ ἴσα, πλευρὰ ἄρα ἁ ΕΑ πλευρᾷ τᾷ ΘΗ ἴσα ἐστίν. Κοινὰ ποτικείσθω ἁ ΑΗ· εὐθεῖα ἄρα ἁ ΕΗ εὐθείᾳ τᾷ ΑΘ, τουτέστι τᾷ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἴσα ἐστίν· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου δὴ φανερὸν ὅτι εὐθεῖα ἁ ΔΕ τᾷ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἴσα. Ἐπεὶ γὰρ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΗΘ ἴσα ἐστίν, ἐσσεῖται καὶ πλευρὰ ἁ ΔΘ πλευρᾷ τᾷ ΔΕ, τουτέστι τᾷ ΑΘ, ἴσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ ἔτι δῆλον ὅτι εὐθεῖα ἁ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον τέτμαται κατὰ τὸ Δ σαμεῖον· τμᾶμα δὲ τὸ ΔΕ τὸ μεῖζόν ἐστιν, ἐπεὶ ἁ ΕΔ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου, ἁ δὲ ΔΓ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγραφομένων.

LE PROBLÈME DES BŒUFS

NOTICE

Le fond du problème traité dans cet opuscule peut être considéré comme étant d'Archimède lui-même. Dès l'antiquité, une scholie à la page 165 E du *Charmide* de Platon déclare que « le calcul arithmétique examine entre autres ce problème appelé problème des bœufs par Archimède », et Héron d'Alexandrie mentionne ce problème comme posé par Archimède[1]. En revanche, la critique moderne est peu disposée[2] à attribuer à Archimède aussi la forme de l'énoncé du problème, une épigramme de vingt-deux distiques adressée, d'après l'en-tête du poème, aux géomètres d'Alexandrie. Mais l'idée d'une paternité d'Archimède paraît peut-être moins étrange quand on pense que les paysages de sa patrie, l'île de Thrinacie, où paissent les immenses troupeaux du dieu Hélios, venaient de devenir un des cadres de la poésie bucolique renouvelée. Pourquoi Archimède n'aurait-il pas eu l'humour de présenter son problème comme une « bucolique », au sens étymologique du terme, mise sous la forme d'une épigramme ?

Le problème en question devait non seulement défier la sagacité de ses correspondants d'Alexandrie ; il offre de sérieuses difficultés même à l'analyse moderne. Les effectifs des huit troupeaux de bœufs, quatre de taureaux et quatre de vaches, de quatre couleurs différentes, noir, blanc, jaune, bigarré, constituent en effet huit inconnues, alors que l'épigramme n'indique que sept relations numériques entre les troupeaux.

1. Cf. *Déf.*, IV, p. 98.

2. Cf. en particulier, B. Krumbiegel, *Das Problema bouinum des Archimedes*, Zeitschr. für Mathem. und Physik, XXV, 1880, Hist.-litter. Abteilung, p. 121-136.

Les nombres cherchés sont donc les solutions d'un système de sept équations avec huit inconnues. Ce système, « diophantique » avant le terme, ne pourra donc être résolu que par l'adjonction d'une condition supplémentaire, par l'introduction d'un paramètre dans le système des sept équations, et ce paramètre est lui-même soumis à deux conditions, — « diophantiques » elles aussi —, exprimées dans les vers 33 à 35 et 37 à 39, qui postulent que la somme A+M des nombres des taureaux blancs et des taureaux noirs soit un nombre carré, et que la somme P+X des nombres des taureaux bigarrés et des taureaux blonds soit un nombre triangulaire, c'est-à-dire, d'après l'arithmétique pythagoricienne, un nombre de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$.

L'épigramme ne contient aucune indication sur la manière dont Archimède a envisagé la solution du problème des bœufs, et la scholie à ce problème, du manuscrit de Wolfenbuettel, dont nous présentons le texte à la suite de l'épigramme, donne pour les huit inconnues des valeurs qui satisfont bien les sept équations dont il a été question plus haut, mais qui sont telles que la somme A+M n'est pas un nombre carré, ni P+X un nombre triangulaire. Il était réservé à l'algèbre du XIXe siècle, avec ses puissants moyens d'analyse, de résoudre le problème en tenant compte de la totalité des conditions. Parmi les savants qui ont étudié le problème des bœufs, citons G. Hermann[1], I. F. Wurm.[2], G. H. F. Nesselmann[3], J. L. Heiberg[4], A. Amthor[5], M. Cantor[6], P. Tannery[7], Th. Heath[8].

1. *De Archimedis problemate bouino*, dissert. Leipzig, 1828.
2. Dans *Jahns Jahrbücher*, XIV, p. 194.
3. Dans *Algebra der Griechen*, Berlin, 1842, p. 481 sq.
4. Dans *Quaestiones Archimedeae*, Copenhague, 1879, p. 66-69.
5. Dans *Zeitschr. für Math. und Physik*, XXV, 1880, p. 153-171.
6. *Ibid.*, XXIV, p. 169.
7. Dans *Mémoires de la Soc. des Sciences de Bordeaux*, 1880, III, p. 369 sq.
8. Dans *Diophantus of Alexandria*, 2e éd. 1910, p. 142 sq.

On connaît jusqu'à présent deux manuscrits grecs contenant le *Problème des bœufs*, le *Guelferbytanus Gudianus Gr.* 77, sigle *G*, d'après lequel G. E. Lessing a établi le texte de son *editio princeps*, qui parut[1] en 1773, et le *Parisinus Gr.* 2448, XIVe siècle, sigle P, consulté pour la première fois, pour le *Problème des bœufs*, par H. Lebègue.

1. Dans *Beiträge zur Gesch. u. Litteratur,* Braunschweig 1773, p. 421 sq.

LE PROBLÈME DES BŒUFS

Ce problème, inventé et rédigé sous forme d'épigramme par Archimède, fut soumis par lui, pour la recherche d'une solution, à ceux qui, à Alexandrie, étudiaient ces questions, dans une lettre adressée à Ératosthène de Cyrène.

Mesure-moi, ami, si tu as la sagesse en partage, avec une application soutenue, le nombre des bœufs d'Hélios qui jadis paissaient dans les plaines de l'île Thrinacienne, la Sicile, répartis en quatre troupeaux de couleurs variées, l'un d'un blanc de lait, le second d'un noir brillant, le troisième blond, et le quatrième bigarré. Dans chaque troupeau, il y avait un nombre considérable de taureaux dans les proportions que voici : imagine, ami, les blancs en nombre égal à la moitié, augmentée du tiers, des taureaux noirs et augmentée de tous les blonds, et le nombre des noirs égal au quart et au cinquième du nombre des bigarrés et au nombre de tous les blonds. Observe, d'autre part, que le nombre des bigarrés restants est égal au sixième, augmenté du septième, du nombre des taureaux blancs et au nombre de tous les blonds. Les proportions des vaches étaient les suivantes : le nombre des blanches était exactement égal à la somme du tiers et du quart de tout le troupeau noir, alors que les

PROBLEMA BOVINUM

Πρόβλημα,

ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον ἐπιστολῇ.

Πληθὺν Ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον
φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετο νήσου
Θρινακίης τετραχῇ στίφεα δασσαμένη
χροιὴν ἀλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον. Ἐν δὲ ἑκάστῳ
στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι
συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες· ἀργότριχας μὲν
κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ
καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον,
αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
Τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε
καὶ ξανθοῖς αὐτοὺς πᾶσιν ἰσαζομένους.
Θηλείαισι δὲ βουσὶ τάδ' ἔπλετο· λευκότριχες μὲν
ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἶσαι·

3 πραγματευομένοις Struve : πραγματουμένοις *G* || 8 δασσαμένη *G* : δασαμένη P || 16 τετράτῳ τε P : τετάρτῳ *G* || 17 πᾶσιν P : πᾶσι *G* || 20 ἰσαζομένους *G* : ἰδαιομένους P || 23 τετράτῳ P : τετάρτῳ *G*.

noires égalaient en nombre la somme du quart et du cinquième du nombre des bigarrées quand elles venaient toutes paître avec les taureaux. Les bigarrées, d'autre part, avaient un nombre égal à la somme de la cinquième et de la sixième partie de tout le troupeau des blondes, et les blondes étaient égales en nombre à la moitié du tiers, augmentée du septième, du troupeau blanc. Ami, si tu peux me dire exactement combien il y avait de bœufs d'Hélios en précisant le nombre des taureaux robustes et, à part, celui des vaches pour chaque couleur, tu ne seras, certes, pas appelé ignorant ni inculte en matière de nombres, mais tu ne te feras pas pour autant ranger parmi les savants. Mais examine encore toutes les manières dont les bœufs d'Hélios ont été groupés. Chaque fois que les taureaux blancs venaient joindre leur multitude aux noirs, ils se rangeaient fermement en un groupe ayant la même mesure en profondeur et en largeur, et les vastes plaines de la Thrinacie étaient remplies de cet amas carré. Les blonds et les bigarrés, réunis, se rangeaient de leur côté de façon à former un groupe qui, commençant par un, allait s'élargissant jusqu'à parfaire une figure triangulaire, sans que les taureaux d'autres couleurs fussent présents ni absents. Quand tu auras trouvé, ami, et embrassé dans ton esprit la solution de toutes ces questions, en indiquant toutes les mesures de ces multitudes, rentre chez toi, te glorifiant de ta victoire, et sache qu'on te juge arrivé à la perfection dans cette science.

Scholie

Archimède a ainsi exposé avec certitude, dans ce poème, le problème (sc. des bœufs), à savoir qu'il doit y avoir quatre troupeaux de bœufs ; le premier troupeau

αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο
σὺν ταύροις πάσαις εἰς νομὸν ἐρχομέναις.
Ξανθοτρίχων δ' ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον τετραχῇ.
Ξανθαὶ δ' ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι
ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.
Ξεῖνε, σὺ δ' Ἠελίοιο βόες πόσαι ἀτρεκὲς εἰπών,
χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
χωρὶς δ' αὖ θήλειαι ὅσαι κατὰ χροιὰν ἕκασται,
οὐκ ἄιδρίς κα λέγοι' οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής,
οὐ μὴν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος. Ἀλλ' ἴθι φράζευ
καὶ τάδε πάντα βοῶν Ἠελίοιο πάθη.
Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν
κυανέοις, ἵσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
εἰς βάθος εἰς εὖρός τε, τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη
πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
Ξανθοὶ δ' αὖτ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
ἵσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων
ἀλλοχρόων ταύρων οὔτ' ἐπιλειπομένων.
Ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας
καὶ πληθέων ἀποδούς, ξεῖνε, τὰ πάντα μέτρα
ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος ἴσθι τε πάντως
κεκριμένος ταύτῃ γ' ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

Σχόλιον

Τὸ μὲν οὖν πρόβλημα διὰ τοῦ ποιήματος ὁ Ἀρχιμήδης ἐδήλωσε σαφῶς· ἰστέον δὲ λεγόμενον, ὅτι τέσσαρας

1 τετράτῳ P : τετάρτῳ *G* ‖ 4 δ' P : om. *G* ‖ 5 τετραχῇ *G* : τετραχεῖ P ‖ 6 τρίτου P : τρίτον *G* ‖ 11 λέγοι' *G* : λέγοιο P ‖ 19 ἀμβολάδην *G* : ἀμβολάνδην P ‖ 22 πραπίδεσσιν *G* : πραπίδεσιν P ‖ ἀθροίσας *G* : ἀθρήσας P ‖ 23 ξεῖνε, τὰ P : ὦ ξένε *G*.

comprend des taureaux blancs et des vaches blanches, dont le nombre s'élève à quatorze myriades de myriades augmentées de cinq cent quatre-vingt-deux myriades et de sept mille trois cent soixante unités[1] ; le deuxième troupeau comprend des taureaux noirs et des vaches noires dont le nombre (sc. total) s'élève à neuf myriades de myriades augmentées de huit mille huit cent trente myriades et de huit cents unités[2] ; le troisième troupeau comprend des taureaux bigarrés et des vaches bigarrées dont le nombre s'élève à huit myriades de myriades augmentées de six mille neuf cent quatre-vingt-onze myriades et de quatre cents unités[3] ; le quatrième troupeau comprend les bœufs blonds dont le nombre (sc. total) s'élève à sept myriades de myriades augmentées de six mille sept cent huit myriades et de huit mille unités[4] ; il s'ensuit que la somme des effectifs des quatre troupeaux s'élève à quarante myriades de myriades augmentées de trois mille cent douze myriades et de six mille cinq cent soixante unités[5]. Le troupeau des taureaux blancs a un effectif de huit myriades de myriades augmentées de deux mille neuf cent trente et une myriades et de huit mille cinq cent soixante unités[6], le nombre des vaches blanches est de cinq myriades de myriades augmentées de sept mille six cent cinquante myriades et de huit mille huit cent unités[7] ; le troupeau des taureaux noirs a un effectif de cinq myriades de myriades augmentées de neuf mille six cent quatre-vingt-quatre myriades et de mille cent vingt unités[8], et le nombre des vaches noires est de trois myriades de myriades augmentées de neuf mille cent quarante-cinq myriades et de neuf mille six cent quatre-vingt unités[9] ; le troupeau des taureaux bigarrés a un effectif de cinq myriades de myriades augmentées de huit mille huit cent soixante-quatre myriades et de quatre mille huit cent unités[10], et le nombre des vaches bigarrées est de deux myriades de myriades augmentées de huit mille cent vingt-six

1-10. Cf. notes complémentaires.

ἀγέλας εἶναι δεῖ βοῶν, λευκοτρίχων μὲν μίαν ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθος ὁμοῦ συνάγει μυριάδας διπλᾶς ιδ′ καὶ ἁπλᾶς φπβ′ καὶ μονάδας ,ζτξ′, κυανοχρόων δ᾽ ἄλλην ὁμοῦ ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθός ἐστι μυριάδων διπλῶν ἐννέα καὶ ἁπλῶν ,ηωλ′ καὶ μονάδων ω′, μιξοτρίχων δ᾽ ἄλλην ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθός ἐστι μυριάδων διπλῶν η′ καὶ ἁπλῶν ,ϛϡϟα′ καὶ μονάδων υ′· τῆς δὲ λοιπῆς ἀγέλης ξανθοχρόων συνάγει τὸ πλῆθος διπλᾶς μυριάδας ζ′ καὶ ἁπλᾶς ,ϛψη′, μονάδας δὲ ,η· ὥστε συνάγεσθαι ὁμοῦ τὸ πλῆθος τῶν δ᾽ ἀγελῶν μυριάδας διπλᾶς μ′ καὶ ἁπλᾶς ,γριβ′ καὶ μονάδας ,ϛφξ′. Καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἔχει μυριάδας διπλᾶς η′ καὶ ἁπλᾶς ,βϡλα′ καὶ μονάδας ,ηφξ′, θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς ε′ καὶ ἁπλᾶς ,ζχν′ καὶ μονάδας ,ηω′, ἡ δὲ ἀγέλη τῶν κυανοχρόων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς ε′ καὶ ἁπλᾶς ,θχπδ′ καὶ μονάδας ,αρκ′, θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς γ′ καὶ ἁπλᾶς ,θρμε′ καὶ μονάδας ,θχπ′, ἡ δ᾽ ἀγέλη τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς ε′ καὶ ἁπλᾶς ,ηωξδ᾽ καὶ μονάδας ,δω′, θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς β′ καὶ ἁπλᾶς ,ηρκϛ′ καὶ μονάδας ,εχ᾽, ἡ δ᾽ ἀγέλη τῶν ξανθοχρωμάτων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς γ′ καὶ ἁπλᾶς ,γρϟε′ καὶ μονάδας ϡξ′, θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς δ′ καὶ ἁπλᾶς ,γφιγ′

21 ,εχ′ Lessing : ,θχ′ ms. *G*.

myriades et de cinq mille six cent unités[1] ; le troupeau des taureaux blonds a un effectif de trois myriades de myriades augmentées de trois mille cent quatre-vingt-quinze myriades et de neuf cent soixante unités[2], et le nombre des vaches blondes est de quatre myriades de myriades augmentées de trois mille cinq cent treize myriades et de sept mille quarante unités[3]. Le nombre des taureaux blancs est ainsi égal à la somme de la moitié et du tiers du nombre des taureaux noirs, augmentée du nombre total des taureaux blonds[4], le nombre des taureaux noirs est égal à la somme du quart et du cinquième du nombre des taureaux bigarrés augmentée du nombre total des taureaux blonds[5], le nombre des taureaux bigarrés est égal à la somme du sixième et du septième du nombre des taureaux blancs augmentée du nombre total des taureaux blonds[6], le nombre des vaches blanches était égal à la somme du tiers et du quart de tout le troupeau des bœufs noirs[7], le nombre des vaches noires était égal à la somme du quart et du cinquième de tout le troupeau des bœufs bigarrés[8], et le nombre des vaches bigarrées est égal à la somme du cinquième et du sixième de la totalité des bœufs blonds[9]. D'autre part, le nombre des vaches blondes était égal à la somme de la sixième et de la septième partie de tout le troupeau des bœufs blancs[10]. De plus, la multitude contenue dans les troupeaux des taureaux blancs et des taureaux noirs réunis se mesure par un nombre carré, et la multitude contenue dans les troupeaux réunis des taureaux blonds et des taureaux bigarrés se mesure par un nombre triangulaire, conformément aux règles indiquées pour chaque couleur[11].

1. 200 000 000 + 81 260 000 + 5 600 = 281 265 600 vaches bigarrées.

2. 300 000 000 + 31 950 000 + 960 = 331 950 960 taureaux blonds.

3. 400 000 000 + 35 130 000 + 7040 = 435 137 040 vaches blondes.

4-11. Cf. notes complémentaires.

καὶ μονάδας ,ζμ΄. Καί ἐστι τὸ πλῆθος τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἴσον τῷ ἡμίσει καὶ τρίτῳ μέρει τοῦ πλήθους τῶν κυανοχρόων ταύρων καὶ ἔτι ὅλῃ τῇ τῶν ξανθοχρωμάτων ἀγέλῃ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν κυανοχρωμάτων ἴσον τῷ τετάρτῳ καὶ πέμπτῳ μέρει τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων καὶ ὅλῳ τῷ πλήθει τῶν ξανθοχρωμάτων, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων ἴσον τῷ ἕκτῳ καὶ ἑϐδόμῳ μέρει τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἔτι τῷ πλήθει ὅλῳ τῶν ξανθοχρωμάτων ταύρων, καὶ πάλιν τὸ πλῆθος τῶν λευκῶν θηλειῶν ἴσον τῷ τρίτῳ καὶ τετάρτῳ μέρει ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν κυανοχρόων, τὸ δὲ τῶν κυανοχρόων ἴσον τῷ τετάρτῳ καὶ πέμπτῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν ποικιλοτρίχων, τὸ δὲ τῶν ποικιλοτρίχων ἴσον τῷ πέμπτῳ καὶ ἕκτῳ μέρει τῆς ὅλης τῶν ξανθῶν βοῶν. Πάλιν δὲ τὸ τῶν ξανθῶν θηλειῶν πλῆθος ἦν ἴσον τῷ ἕκτῳ τε καὶ ἑϐδόμῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν λευκῶν βοῶν. Καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἡ τῶν κυανοχρόων ταύρων συντεθεῖσα ποιεῖ τετράγωνον ἀριθμόν, ἡ δ' ἀγέλη τῶν ξανθοτρίχων ταύρων μετὰ τῆς ἀγέλης τῶν ποικιλοχρόων συντεθεῖσα ποιεῖ τρίγωνον, ὡς ἔχει τὰ τῶν ὑποκειμένων κανόνων καθ' ἕκαστον χρῶμα.

NOTES COMPLÉMENTAIRES

Page 24.

3. Rappelons qu'Archimède désigne le paramètre d'une parabole par l'expression « le segment de droite qui va jusqu'à l'axe ». Il s'agit du segment compris, sur une génératrice du cône qui définit la parabole, entre le sommet de la parabole et le sommet du cône. En expression algébrique, le paramètre est p dans l'équation $y^2 = 2\,p\,x$, en coordonnées cartésiennes.

Page 25.

1. Dans cette seconde partie du traité *Des corps flottants*, Archimède suppose plane la surface du liquide, alors que, dans la première partie, il tient partout compte de la proposition I, 2.
2. Cf. *Quadr. parab.*, 1.

Page 26.

3. Hypothèse complémentaire de celle qui est énoncée à la fin de la prop. I, 7.
4. Bien que dans les énoncés des propositions II, 2 et 3 le rapport des densités soit présenté comme n'ayant aucune importance sur les conclusions, Archimède suppose, dans les démonstrations de ces deux théorèmes, que la densité du solide est inférieure à celle du liquide.

Page 35.

2. On a en effet : $FO = 2FN$, d'où $\frac{FN}{NO} = \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$; d'autre part, $\frac{F\Omega}{NO} = \frac{4}{15}$; en ajoutant les deux dernières égalités : $\frac{FN+F\Omega}{NO} = \frac{9}{15}$; $\frac{N\Omega}{NO} = \frac{9}{15}$, d'où (cf. Eucl. V, 7, coroll.) $\frac{O\Omega}{N\Omega} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Page 41.

6. Puisque $\Pi M = \Phi + X = \frac{3}{2}\,\Phi < \frac{3}{2}\,\Pi H$, et $HM = \Pi M - \Pi H < \frac{3}{2}\,\Pi H - \Pi H$.

7. Puisque $\Theta O = \Theta\Omega + \Omega O = PK + BP = BK = 2\,K\Delta$, et $B\Delta = NO$.

Page 49.

1. Cf. Eucl. V, 10.

2. C'est-à-dire de manière que $\frac{B\Delta}{EZ} = \frac{A\Delta}{AZ}$ et $\frac{EZ}{H\Theta} = \frac{AI}{A\Delta}$.

Page 50.

1. La tangente Aw à la parabole ABL (sc. ΑΠΟΛ) au point A coupe les prolongements de NO, ZE et HT en c, v et m ; on a donc $\frac{BD}{EZ} = \frac{AD}{AZ} = \frac{Dw}{Zv}$; mais $Dw = 2BD$, d'après *Quadr. parab.*, 2 ; donc $Zv = 2EZ$, et Aw est tangent aussi à la parabole AEI ; pour les mêmes raisons, Aw est aussi tangent à la parabole ATD, d'où, d'après *Quadr. parab.*, 5, $\frac{LN}{AN} = \frac{NO}{Oc}$, et, d'après Eucl. V, 18, $\frac{AL}{AN} = \frac{Nc}{Oc}$, et, par conséquent, $Oc = \frac{AN \cdot Nc}{AL}$; pour les mêmes raisons, $Gc = \frac{AN.Nc}{AI}$; $Xc = \frac{AN.Nc}{AD}$; $OG = Gc - Oc = \frac{AN \cdot Nc \cdot (AL - IA)}{IA \cdot AL}$; $GX = Xc - Gc = \frac{AN \cdot Nc \cdot (IA - AD)}{AD \cdot IA}$ et, par conséquent $\frac{OG}{GX} = \frac{AD \cdot (AL - IA)}{AL \cdot (IA - AD)} = \frac{AD \cdot LI}{AL \cdot ID}$.

Page 57.

6. Cf. prop. II, 4.
7. Sc. la figure qui suit.
8. Sc. le développement qui suit.

Page 75.

7. Ce pentagone est, en effet, égal, d'après les évaluations qui précèdent, à : $\frac{1}{2}$ carré AG $- \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24}\right)$ carré AG $= \left(\frac{1}{2} - \frac{17}{48}\right)$ AG $= \frac{7}{48}$ AG $= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)\right]$AG.

Page 85.

3. Cf. *ibid.* I, 4.
4. Cf. *ibid.* I, 14.
5. Cf. *ibid.* I, 10.

Page 86.

1. Cette dernière remarque est condamnée par Heiberg comme une addition provenant probablement d'une note marginale.
2. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, prop. 1.

Page 87.

2. Sc. les traités, perdus, d'Euclide et d'Aristée ; cf. *Quadr. parab.*, 2.
3. Cf. Eucl. V, 9 et VI, 4.
4. Autre interpolation.
5. Cf. le lemme 4.
6. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 6 et 7.
7. Cf. le lemme 3.

Page 88.

2. De la proportion $\frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Delta B}{AK}$ on déduit en effet $\Delta B = \frac{1}{2} AK = \frac{1}{4} AZ$; cf. Eucl. VI, 4.
3. Dans *Quadr. parab.*, prop. 14-17 ; mais la démonstration géométrique promise ici pour le traité de la méthode n'a pas été retrouvée.

Page 90.

1. Cf. Eucl. VI, 4.
2. Cf. Eucl. VI, 8, coroll.
3. Cf. Eucl. I, 47.
4. Cf. Eucl. V, 15.
5. Comme le fait remarquer Heiberg, *op. laud.* II, p. 443, il y a quelque confusion dans le texte ; on s'attendrait, pour l'expression de la ἑπομένη de la proportion, à πρὸς ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους, au lieu du datif ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις.

Page 94.

1. *Sur les con. et les sphér.*, 11.
2. Cf. Eucl. VI, 4.
3. Cf. Eucl. V, 18 ; VI, 4.

4. Ce passage est une interpolation, comme le montrent les expressions ἡ πλαγία et ἡ ὀρθία qui n'apparaissent dans la terminologie des coniques qu'avec Apollonius.
5. Cf. Eucl. V, 15 ; VI, 4.
6. Cf. Eucl. V, 9.
7. Cf. Eucl. XII, 2.

Page 104.

2. Le ms. C présentant ici une lacune presque complète, dans la fin de la prop. 6, le raisonnement a été reconstitué pour la première fois par Heiberg, d'après la figure et d'après le milieu de la prop. 9.
3. Cf. lemme 10.

Page 105.

1. Cf. Eucl. V, 17.
2. Cf. prop. 2.
3. Cf. Eucl. V, 22.

Page 106.

1. Cf. *De le sph. et du cyl.* II, 2.
2. Le raisonnement manquant dans le ms. C a été reconstitué par Heiberg, d'après la figure et d'après le début de la prop. 2.

Page 112.

3. Cf. Eucl. V, 18.
4. Puisque $\frac{3}{2}\,\mathrm{H\Gamma} + \frac{1}{2}\,\mathrm{HA} = \mathrm{H\Gamma} + \frac{1}{2}\,(\mathrm{H\Gamma}+\mathrm{HA}) = \mathrm{H\Gamma} + \frac{1}{2}\,\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{H\Gamma} + \Gamma\Xi$; et $\mathrm{H\Gamma} + \frac{1}{4}\,\mathrm{HA} = \Gamma\mathrm{H} + \mathrm{H}\Phi$.
5. Cf. Eucl. V, 15.
6. Cf. Eucl. V, 16.
7. Cf. Eucl. V, 17.

Page 119.

1. La suite de la prop. 13 manque dans le texte grec. Elle a été reconstituée, dans le style d'Archimède, par Heiberg :

Les centres de gravité des parallélogrammes posés sur ΣK et ZT sont les milieux de ΣK et ZT ; le centre de gr. de leur somme est donc le point de rencontre A′ de la droite de jonction des centres de gr. des parallélogrammes avec ΘΠ (cf. lemme 3). De même, le centre de gr. de la somme des parallélogrammes posés sur XΛ et YΦ est le point de rencontre B′ de la droite joignant les milieux de XΛ et de YΘ avec ΘΞ. Dès lors, on a

les relations (cf. Eucl. III, 31 ; V, 15 ; VI, 1, 4, 8, 17)

$$\frac{\text{parallélogr. sur } \Sigma K + \text{parallélogr. sur } ZT}{\text{p. sur } X\Lambda + \text{p. sur } Y\Phi} = \frac{\Sigma K}{\Lambda X} = \frac{\Sigma K}{\Sigma P} =$$

$$\frac{\overline{\Sigma K}^2}{\Sigma P \cdot \Sigma K} = \frac{\Sigma P \cdot \Sigma O}{\Sigma P \cdot \Sigma K} = \frac{\Sigma O}{\Sigma K} = \frac{\Sigma P + 2\,\Sigma\Theta}{\Sigma K} = \frac{\Lambda X + 2\,X\Sigma}{\Sigma K} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}\Lambda X + X\Sigma}{\frac{1}{2}\Sigma K} = \frac{B'\Theta}{A'\Theta}$$

; les parallélogrammes indiqués se font donc équilibre autour de Θ, et le même raisonnement s'applique à tous les parallélogrammes déterminés de la même manière, d'où il suit que le demi-cylindre et le prisme HΘM, remplis de ces parallélogrammes, se font, eux aussi, équilibre autour de Θ. Mais le demi-cylindre fait équilibre autour de Θ au segment de cylindre posé sur Ξ (cf. prop. 12), et ΘΞ est égal à ΠΘ ; il s'ensuit que le segment posé sur Π fait équilibre au prisme HΘM. De plus, le centre de gr. du prisme est le point qui divise ΞΘ de manière que la partie située du côté de Θ est double de la partie restante (cf. lemme 5) ; le rapport du segment de cylindre au prisme HΘM est donc égal au rapport des deux tiers de ΞΘ à ΠΘ, c'est-à-dire égal au rapport de deux à trois. Comme le prisme HΘM est le quart du prisme entier, le segment de cylindre en est la sixième partie.

Page 123.

1. Le texte grec présente ici une lacune de quelques mots qu'on peut reconstituer d'après le passage correspondant de la prop. 14.

2. Une grande lacune, parsemée de mots et de groupes de mots isolés, dans le texte grec. Le raisonnement a été reconstitué par Heiberg d'après les deux figures et les propositions 19 et 25 du traité *Sur les con. et les sphér.*

3. Cf. Eucl. X, 1.

Page 172.

1. 1 400 000 000 + 5 820 000 + 7 360 = 1 405 827 360 bœufs blancs.

2. 900 000 000 + 88 300 000 + 800 = 988 300 800 bœufs noirs.

3. 800 000 000 + 69 910 000 + 400 = 869 910 400 bœufs bigarrés.

4. 700 000 000 + 67 080 000 + 8 000 = 767 088 000 bœufs blonds.

5. 4 000 000 000 + 31 120 000 + 6 560 = 4 031 126 560 bœufs dans l'ensemble.

6. 800 000 000+29 310 000+8 560 = 829 318 560 taureaux blancs.

7. 500 000 000+76 500 000+8 800 = 576 508 800 vaches blanches.

8. 500 000 000+96 840 000+1 120 = 596 841 120 taureaux noirs.

9. 300 000 000+91 450 000+9 680 = 391 459 680 vaches noires.

10. 500 000 000+88 640 000+4 800 = 588 644 800 taureaux bigarrés.

Page 173.

4. On a en effet : 829 318 560 $= \frac{5}{6} \cdot 596\,841\,120 + 331\,950\,960 =$ 497 367 600+331 950 960 ; cf. v. 9 de l'épigramme.

5. 596 841 120 $= \frac{9}{20} \cdot 588\,644\,800 + 331\,950\,960 = 264\,890\,160 + 331\,950\,960$; cf. v. 12 de l'épigr.

6. 588 644 800 $= \frac{13}{42} \cdot 829\,318\,560 + 331\,950\,960 = 256\,693\,840 + 331\,950\,960$; cf. v. 14 de l'épigr.

7. 576 508 800 $= \frac{7}{12} \cdot 988\,300\,800 = \frac{6\,918\,105\,600}{12}$; cf. v. 17 de l'épigr.

8. Cf. v. 20 de l'épigr.

9. Cf. v. 22 de l'épigr.

10. Cf. v. 23 de l'épigr.

11. Cf. v. 32 sq. de l'épigr.

TABLE DES MATIÈRES